二値シグナルモデルにおける
戦略的投票とコンドルセ陪審定理

永　岡　成　人

要旨

ある集団が 2 つの選択肢 A, B から 1 つを多数決によって選ぶ，という集団的意思決定問題を考える。2 つの選択肢のうち一方の選択肢は「正解」の選択肢であるが，集団を構成する各メンバーはそれがどちらであるかについては不完全な情報しか持たないとする。コンドルセ陪審定理によると，各メンバーの正解への投票確率が 1/2 を上回るとき，多数決が正解の選択肢を選ぶ確率は，集団の規模が十分に大きくなると 1 に近づいていく。本論文では，どちらの選択肢が正解であるかについての二値シグナルを私的情報として持つ各メンバーが投票を行うベイジアンゲームの均衡において，コンドルセ陪審定理が成り立つかを研究する。一方のシグナルの値は一方の状態において 1/2 より大きい確率で実現し，もう一方のシグナルの値はもう一方の状態において 1/2 より大きい確率で実現すると仮定したとき，二値シグナルモデルにおいてはコンドルセ陪審定理が成り立つ均衡が存在することが既に示されている。それに対して本論文では，両方のシグナルの値が一方の状態において 1/2 より大きい確率で実現すると仮定したとしても，コンドルセ陪審定理が成り立つ均衡が存在することを示す。

1. はじめに

ある集団が 2 つの選択肢 A, B から 1 つを多数決によって選ぶ，という集団的意思決定問題を考える。ここで考える意思決定問題において，2 つの選択肢のうち一方の選択肢は集団を構成するメンバー全員にとって共通して望ましい選択肢であるとして，その選択肢を「正解」と呼ぶことにしよう。しかし，集団を構成する各メンバーは，A, B のどちらが正解であるかについては不完全な情報しか持たないとする。このような不確実性のもとでの多数決による集団的意思決定問題において，コンドルセ陪審定理と呼ばれる次の定理が知られている。各メンバーは自身の持つ情報に従って正解の可能性が高い選択肢に投票するとして，各メンバーの正解への投票確率が 1/2 を上回るとしよう。このとき，多数決が正解の選択肢を選ぶ確率は，集団の規模が大きくなるにつれて上昇していき，やがて

1 に近づいていく。

上で述べたコンドルセ陪審定理はもっとも基本的なバージョンであり，コンドルセ陪審定理に関する様々な拡張・一般化が研究されている。その 1 つは Austen-Smith and Banks（1996）に始まる戦略的投票に関するものである。上で述べたコンドルセ陪審定理では，各メンバーの投票行動は，正解への投票確率という形で外生的に与えられている。それに対して，Austen-Smith and Banks（1996）は，正解の選択肢がどちらであるかという不確実性を状態変数によって表現し，各メンバーは状態に関する二値シグナルという形で私的情報を受け取り，多数決決定の結果に応じて利得を得るというベイジアンゲームの定式化のもとで，ゲームの均衡における投票戦略を考察した。そして，コンドルセ陪審定理が想定する「自身の持つ情報に従って正解の可能性が高い選択肢に投票する」という投票行動が均衡になるとは限らないことを示した。Austen-Smith and Banks（1996）のモデルでは，二値シグナルの実現確率について，一方のシグナルの値は一方の状態において 1/2 より大きい確率で実現し，もう一方のシグナルの値はもう一方の状態において 1/2 より大きい確率で実現する，と仮定している。したがって，もし実現したシグナルの値に従った形で投票を行うならば，それぞれの状態における各メンバーの正解への投票確率は 1/2 を上回るので，集団の規模が大きくなるにつれて期待正解確率は 1 に近づいていき，コンドルセ陪審定理が成り立つ，という特徴を持っている。しかし，そのような投票行動は均衡になるとは限らないので，均衡における戦略的投票を想定した場合にコンドルセ陪審定理の結論が成り立つかは明らかでない，ということになる。

これに対して，肯定的な解決を与えたのが McLennan（1998）と Wit（1998）および Feddersen and Pesendorfer（1998）である。McLennan（1998）は，期待正解確率を最大化する戦略組が均衡になることを示した。最大化された期待正解確率はそれ以外の戦略組による期待正解確率以上であるので，均衡とは限らないある戦略組のもとで期待正解確率が 1 に近づくならば，その均衡でも期待正解確率は 1 に近づいていなければならない。したがって，それぞれの状態における各メンバーの正解への投票確率が 1/2 を上回る戦略が存在するならば，その戦略組のもとではコンドルセ陪審定理が成り立つので，コンドルセ陪審定理が成り立つ均衡が存在するのである。Wit（1998）と Feddersen and Pesendorfer（1998）は，Austen-Smith and Banks（1996）のモデルにおける対称混合戦略均衡を分析し，集団の規模が大きくなったときにその収束先でコンドルセ陪審定理が成り立つことを示した[1)]。その後，Austen-Smith and Banks（1996）のモデルを様々に拡張・一般化したときに，戦略的投票のもとでコンドルセ陪審定理が引き続き成り立つかが研究されている[2)]。

本論文においてもこれらと同様に，戦略的投票を想定したときにコンドルセ陪審定理が

成り立つかを研究する。本論文では，Austen-Smith and Banks (1996) などのモデルと同様の二値シグナルモデルを取り扱うが，二値シグナルのどちらの値も一方の状態において 1/2 より大きい確率で実現する，と仮定する。この場合には，Austen-Smith and Banks (1996) などとは異なり，実現したシグナルの値に従った形で投票を行ったとしても，一方の状態における各メンバーの正解への投票確率は 1/2 を上回るが，もう一方の状態における各メンバーの正解への投票確率は 1/2 を下回ることになり，コンドルセ陪審定理の想定が一方の状態でしか満たされなくなっている。しかし，それでも Wit (1998) や Feddersen and Pesendorfer (1998) と同様の混合戦略が均衡になり，その均衡においてコンドルセ陪審定理が成り立つことを示す。

本論文と似た状況を扱った研究として，Chakraborty and Ghosh (2003) や Ben-Yashar (2014) がある。Chakraborty and Ghosh (2003) は，二値シグナルを特殊ケースとして含む形で，単調尤度比条件を満たす 2 種類以上の値を取るシグナルのモデルを取り扱い，コンドルセ陪審定理が成り立つ均衡が存在することを示した。ただし，非対称均衡も含めたすべての均衡の中でもっとも期待正解確率が高い効率的均衡に注目しており，二値シグナルの場合については，効率的均衡は一般的に非対称均衡になることも示している[3)]。それに対して本論文では，対称均衡に限定したとしてもコンドルセ陪審定理が成り立つ均衡が存在することを示す。Ben-Yashar (2014) は，一方の状態における各メンバーの正解への投票確率は 1/2 を上回るが，もう一方の状態における各メンバーの正解への投票確率は 1/2 を下回る，ただし平均正解確率は 1/2 を上回るという場合について，2 人ずつ人数を増やしていくという形で集団の規模が大きくなったときに，期待正解確率が上昇していくことが起きるのは集団の規模が一定以下であることを示した。この結果は，コンドルセ陪審定理の正解への投票確率についての想定を一般化すると，コンドルセ陪審定理が成り立たなくなることを示唆している。ただし，Ben-Yashar (2014) は各メンバーの投票行動を，各状態での正解への投票確率という形で外生的に与えている。本論文で扱うモデルでの各メンバーが実現したシグナルの値に従った形で投票を行った場合の各メンバーの各状態での正解への投票確率が，Ben-Yashar (2014) のモデルにおける各状態での正解への投票確率に対応している。しかし本論文の分析から，集団の規模が十分大きいときには，このような投票行動は均衡にはならないことが示される。

2. モ デ ル

集団を構成するメンバーの人数を $2n+1$ 人として，2 つの選択肢を A, B とする。この集団は，$2n+1$ 人全員による多数決投票によって過半数の得票を得た選択肢を採択する

ことにして，決定 $d \in \{A, B\}$ を決める。２つの選択肢のうち一方の選択肢は正解の選択肢であるとして，どちらが正解であるかを状態 $w \in \{A, B\}$ で表す。状態が $w=A$ であるときには正解である選択肢は A であり，状態が $w=B$ であるときには正解である選択肢は B であるとして，状態の事前確率は $\Pr(w=A)=q \in (0, 1)$ とする。集団を構成するメンバーの間で利得は共通であり，利得は状態 $w \in \{A, B\}$ と多数決による決定 $d \in \{A, B\}$ に応じて

$$u(d=A \mid w=A)=u(d=B \mid w=B)=1$$

$$u(d=B \mid w=A)=u(d=A \mid w=B)=0$$

であるとする。これは，多数決によって正解の選択肢を選んだ場合は１の利得を，不正解の選択肢を選んだ場合は０の利得を受け取ることを表す。

集団を構成するメンバー i は，状態に関する情報を二値シグナル $s_i \in \{A, B\}$ の形で受け取る。シグナルの実現確率は $\Pr(s_i=A \mid w=A)=t_A$ および $\Pr(s_i=B \mid w=B)=t_B$ であり，単調尤度比条件

$$\frac{\Pr(s_i=A \mid w=A)}{\Pr(s_i=A \mid w=B)} > \frac{\Pr(s_i=B \mid w=A)}{\Pr(s_i=B \mid w=B)} \Leftrightarrow \frac{t_A}{1-t_B} > \frac{1-t_A}{t_B} \tag{1}$$

が成り立つと仮定する[4)]。さらに，

$$\Pr(s_i=A \mid w=A) > \Pr(s_i=B \mid w=B) \Leftrightarrow t_A > t_B \tag{2}$$

を仮定する。単調尤度比条件(１)から $t_A > 1-t_B$ が成り立つので，シグナルの実現確率に関する仮定(１)，(２)から

$$t_A > t_B,\ 1-t_B > 1-t_A \tag{3}$$

である。また，(３)より

$$\Pr(s_i=A \mid w=A)=t_A > \frac{1}{2}$$

が成り立つ。もう一方のシグナルについては

$$\Pr(s_i=B \mid w=B)=t_B < \frac{1}{2}$$

を仮定する[5)]。

手番は次の通りである。まず，状態 $w \in \{A, B\}$ が実現する。次に，各メンバー i はシグナル $s_i \in \{A, B\}$ を私的情報として受け取る。そして，各メンバーは同時に A または B のいずれかに投票を行い，多数決によって決定 $d \in \{A, B\}$ が決まる。最後に，決定が正解の場合は１，不正解の場合は０の利得を受け取る。

3. 結　　果

3.1 均衡

ゲームの対称戦略による均衡を分析する。各メンバー i は自身の受け取ったシグナル s_i を私的情報として投票先を選ぶので，戦略はそれぞれのシグナルを受け取ったときに A に投票する確率という形で表すことができる。これを (σ_A, σ_B) で表し，σ_A をシグナル $s_i=A$ を受け取ったときの A への投票確率，σ_B をシグナル $s_i=B$ を受け取ったときの A への投票確率であるとしよう。戦略 (σ_A, σ_B) のもとでの各メンバーの各状態 $w\in\{A, B\}$ における正解への投票確率を，それぞれ γ_A, γ_B で表すと，これらは

$$\gamma_A(\sigma_A, \sigma_B)=t_A\sigma_A+(1-t_A)\sigma_B$$

$$\gamma_B(\sigma_A, \sigma_B)=(1-t_B)(1-\sigma_A)+t_B(1-\sigma_B)$$

である。

以下では，Wit (1998) や Feddersen and Pesendorfer (1998) と同様に，$(\sigma_A, \sigma_B)=(0, 0)$ および $(\sigma_A, \sigma_B)=(1, 1)$ 以外の戦略による均衡に注目する。この戦略のもとでは，$0<\gamma_A(\sigma_A, \sigma_B), \gamma_B(\sigma_A, \sigma_B)<1$ となっており，どちらの状態においても A, B のいずれにも投票が行われる可能性がある。このような戦略を切替戦略と呼ぶことにする。自分以外の $2n$ 人の戦略 (σ_A, σ_B) に対する最適反応を考える。シグナル $s_i=A$ を受け取っているときの状態の事後確率は

$$\Pr(w=A\,|\,s_i=A)=\frac{qt_A}{qt_A+(1-q)(1-t_B)}$$

$$\Pr(w=B\,|\,s_i=A)=\frac{(1-q)(1-t_B)}{qt_A+(1-q)(1-t_B)}$$

であり，シグナル $s_i=B$ を受け取っているときの状態の事後確率は

$$\Pr(w=A\,|\,s_i=B)=\frac{q(1-t_A)}{q(1-t_A)+(1-q)t_B}$$

$$\Pr(w=B\,|\,s_i=B)=\frac{(1-q)t_B}{q(1-t_A)+(1-q)t_B}$$

である。このことから，シグナル $s_i=A$ を受け取っているときに，A に投票したときの期待利得が B に投票したときの期待利得以上になるという条件は

$$\frac{qt_A}{qt_A+(1-q)(1-t_B)}\left[\sum_{m=n}^{2n}\binom{2n}{m}\gamma_A(\sigma_A, \sigma_B)^m(1-\gamma_A(\sigma_A, \sigma_B))^{2n-m}\right]$$

$$+\frac{(1-q)(1-t_B)}{qt_A+(1-q)(1-t_B)}\left[\sum_{m=n+1}^{2n}\binom{2n}{m}\gamma_B(\sigma_A, \sigma_B)^m(1-\gamma_B(\sigma_A, \sigma_B))^{2n-m}\right]$$

$$\geq\frac{qt_A}{qt_A+(1-q)(1-t_B)}\left[\sum_{m=n+1}^{2n}\binom{2n}{m}\gamma_A(\sigma_A,\sigma_B)^m(1-\gamma_A(\sigma_A,\sigma_B))^{2n-m}\right]$$

$$+\frac{(1-q)(1-t_B)}{qt_A+(1-q)(1-t_B)}\left[\sum_{m=n}^{2n}\binom{2n}{m}\gamma_B(\sigma_A,\sigma_B)^m(1-\gamma_B(\sigma_A,\sigma_B))^{2n-m}\right]$$

であるから，$s_i=A$ のもとで A に投票するための最適反応条件式は

$$L_A(\sigma_A,\sigma_B)\equiv\frac{q}{1-q}\frac{t_A}{1-t_B}\left[\frac{\gamma_A(\sigma_A,\sigma_B)(1-\gamma_A(\sigma_A,\sigma_B))}{\gamma_B(\sigma_A,\sigma_B)(1-\gamma_B(\sigma_A,\sigma_B))}\right]^n\geq 1 \qquad (4)$$

と表すことができる。同様にシグナル $s_i=B$ を受け取っているときに，A に投票したときの期待利得が B に投票したときの期待利得以上になるという条件は

$$\frac{q(1-t_A)}{q(1-t_A)+(1-q)t_B}\left[\sum_{m=n}^{2n}\binom{2n}{m}\gamma_A(\sigma_A,\sigma_B)^m(1-\gamma_A(\sigma_A,\sigma_B))^{2n-m}\right]$$

$$+\frac{(1-q)t_B}{q(1-t_A)+(1-q)t_B}\left[\sum_{m=n+1}^{2n}\binom{2n}{m}\gamma_B(\sigma_A,\sigma_B)^m(1-\gamma_B(\sigma_A,\sigma_B))^{2n-m}\right]$$

$$\geq\frac{q(1-t_A)}{q(1-t_A)+(1-q)t_B}\left[\sum_{m=n+1}^{2n}\binom{2n}{m}\gamma_A(\sigma_A,\sigma_B)^m(1-\gamma_A(\sigma_A,\sigma_B))^{2n-m}\right]$$

$$+\frac{(1-q)t_B}{q(1-t_A)+(1-q)t_B}\left[\sum_{m=n}^{2n}\binom{2n}{m}\gamma_B(\sigma_A,\sigma_B)^m(1-\gamma_B(\sigma_A,\sigma_B))^{2n-m}\right]$$

であるから，$s_i=B$ のもとで A に投票するための最適反応条件式は

$$L_B(\sigma_A,\sigma_B)\equiv\frac{q}{1-q}\frac{1-t_A}{t_B}\left[\frac{\gamma_A(\sigma_A,\sigma_B)(1-\gamma_A(\sigma_A,\sigma_B))}{\gamma_B(\sigma_A,\sigma_B)(1-\gamma_B(\sigma_A,\sigma_B))}\right]^n\geq 1 \qquad (5)$$

と表すことができる。これら最適反応条件式（4）および（5）の左辺 $L_A(\sigma_A,\sigma_B)$, $L_B(\sigma_A,\sigma_B)$ は，戦略的投票のもとでのコンドルセ陪審定理研究においてよく知られた，自分が受け取ったシグナル $s_i\in\{A,B\}$ に加えて，自分以外の $2n$ 人が戦略 (σ_A,σ_B) に従うときに，A と B の得票数が同数となり自分の１票が決定を左右する pivotal な状況であることを条件としたときの事後確率比を表している。あるシグナルを受け取ったときの最適反応条件式が等号であるとき，A,B への投票が無差別であり，混合行動が最適反応に含まれることになる。最適反応条件式（4）および（5）から，次の補題が成り立つ。

補題１　$2n$ 人の戦略 (σ_A,σ_B) に対する最適反応戦略 (σ_A^*,σ_B^*) において，$\sigma_A^*=\sigma\in[0,1)$ であるならば $\sigma_B^*=0$ であり，$\sigma_B^*=\sigma\in(0,1]$ であるならば $\sigma_A^*=1$ である。

補題１は，均衡において混合戦略が用いられるならば，確率的に投票するのは一方のシ

グナル側のみに限るということを主張している。最適反応条件式(4)および(5)の左辺はそれぞれ，シグナル s_i と pivotal を条件としたときの状態の事後確率比であった。単調尤度比条件(1)より，シグナル $s_i=A$ を受け取っている場合の方が，シグナル $s_i=B$ を受け取っている場合よりも，状態 A の事後確率は大きくなる。したがって，シグナル $s_i=A$ で A, B への投票が無差別（状態の可能性が等しい）となっている場合には，シグナル $s_i=B$ 側では状態 $w=B$ の可能性の方が高いので，B に投票することになるのである。同様に，シグナル $s_i=B$ 側で A, B への投票が無差別（状態の可能性が等しい）となっている場合には，シグナル $s_i=A$ 側では状態 $w=A$ の可能性の方が高いので，A に投票することになる。

次に，これらの混合戦略のもとでの各状態での pivotal 確率比

$$\frac{\Pr(\text{pivotal}|w=A)}{\Pr(\text{pivotal}|w=B)}=\frac{\binom{2n}{n}\gamma_A(\sigma_A,\sigma_B)^n(1-\gamma_A(\sigma_A,\sigma_B))^n}{\binom{2n}{n}\gamma_B(\sigma_A,\sigma_B)^n(1-\gamma_B(\sigma_A,\sigma_B))^n}$$
$$=\left[\frac{\gamma_A(\sigma_A,\sigma_B)(1-\gamma_A(\sigma_A,\sigma_B))}{\gamma_B(\sigma_A,\sigma_B)(1-\gamma_B(\sigma_A,\sigma_B))}\right]^n$$

の性質を調べる。$2n$ 人の戦略（σ_A, σ_B）のもとでの pivotal 確率比は

$$\frac{\Pr(\text{pivotal}|w=A)}{\Pr(\text{pivotal}|w=B)}=\begin{cases}\left[\dfrac{t_A}{(1-t_B)}\dfrac{(1-t_A\sigma)}{(1-(1-t_B)\sigma)}\right]^n & \text{for } (\sigma_A,\sigma_B)=(\sigma,0)\\[2ex] \left[\dfrac{(1-(1-t_A)(1-\sigma))}{(1-t_B(1-\sigma))}\dfrac{(1-t_A)}{t_B}\right]^n & \text{for } (\sigma_A,\sigma_B)=(1,\sigma)\end{cases} \tag{6}$$

である。まず，戦略 $(\sigma_A, \sigma_B)=(\sigma, 0)$ に対して，$\sigma<\sigma'$ とすると，

$$\frac{1-t_A\sigma}{1-(1-t_B)\sigma}>\frac{1-t_A\sigma'}{1-(1-t_B)\sigma'}$$
$$\Leftrightarrow t_A(\sigma'-\sigma)>(1-t_B)(\sigma'-\sigma)$$
$$\Leftrightarrow t_A>1-t_B$$

であるので，(3)より，$s_i=A$ 側混合戦略のもとでの pivotal 確率比は σ に対して単調減少である。同様に，$(\sigma_A, \sigma_B)=(1, \sigma)$ に対して，$\sigma<\sigma'$ とすると，

$$\frac{1-(1-t_A)(1-\sigma)}{1-t_B(1-\sigma)}>\frac{1-(1-t_A)(1-\sigma')}{1-t_B(1-\sigma')}$$
$$\Leftrightarrow t_B(\sigma'-\sigma)>(1-t_A)(\sigma'-\sigma)$$
$$\Leftrightarrow t_B>1-t_A$$

であるので，(3)より，$s_i=B$ 側混合戦略のもとでの pivotal 確率比は σ に対して単調減

少である。これをまとめると，次の補題を得る。

補題2　$2n$ 人の戦略 $(\sigma_A, \sigma_B)=(\sigma, 0)$ および $(\sigma_A, \sigma_B)=(1, \sigma)$ のもとでの pivotal 確率比(6)は，σ に対して単調減少である。

補題1および補題2から，均衡戦略に関する次の定理を得る。

定理1　次のような切替戦略による均衡が存在する。

$$(\sigma_A^*, \sigma_B^*)=\begin{cases}(\sigma_n^*, 0) \quad \text{for} \quad \dfrac{q}{1-q}\in\left(\left[\dfrac{1-t_B}{t_A}\right]^{n+1}, \left[\dfrac{1-t_B}{t_A}\right]^{n+1}\left[\dfrac{t_B}{1-t_A}\right]^{n}\right)\\ (1, 0) \quad \text{for} \quad \dfrac{q}{1-q}\in\left[\left[\dfrac{1-t_B}{t_A}\right]^{n+1}\left[\dfrac{t_B}{1-t_A}\right]^{n}, \left[\dfrac{1-t_B}{t_A}\right]^{n}\left[\dfrac{t_B}{1-t_A}\right]^{n+1}\right]\\ (1, \sigma_n^*) \quad \text{for} \quad \dfrac{q}{1-q}\in\left(\left[\dfrac{1-t_B}{t_A}\right]^{n}\left[\dfrac{t_B}{1-t_A}\right]^{n+1}, \left[\dfrac{t_B}{1-t_A}\right]^{n+1}\right)\end{cases}$$

ただし，σ_n^* は最適反応条件(4)または(5)を等号で満たす混合確率であり，事前確率 q に対して単調増加である。

証明　$\dfrac{q}{1-q}\in\left(\left[\dfrac{1-t_B}{t_A}\right]^{n+1}, \left[\dfrac{1-t_B}{t_A}\right]^{n+1}\left[\dfrac{t_B}{1-t_A}\right]^{n}\right)$ の場合を考える。$s_i=A$ 側で混合する戦略 $(\sigma_A, \sigma_B)=(\sigma, 0)$ のもとでの $s_i=A$ 側の最適反応条件式(4)の左辺は，pivotal 確率比(6)より，

$$L_A(\sigma, 0)=\frac{q}{1-q}\frac{t_A}{1-t_B}\left[\frac{t_A}{(1-t_B)}\frac{(1-t_A\sigma)}{(1-(1-t_B)\sigma)}\right]^n$$

である。この最適反応条件式は

$$L_A(0, 0)=\frac{q}{1-q}\frac{t_A}{1-t_B}\left[\frac{t_A}{(1-t_B)}\right]^n>1$$

および

$$L_A(1, 0)=\frac{q}{1-q}\frac{t_A}{1-t_B}\left[\frac{t_A}{(1-t_B)}\frac{(1-t_A)}{t_B}\right]^n<1$$

である。ここで，$\dfrac{\Pr(\text{pivotal}\,|\,w=A)}{\Pr(\text{pivotal}\,|\,w=B)}$ が σ について連続で単調減少であることから

$$L_A(\sigma_n^*, 0)=\frac{q}{1-q}\frac{t_A}{1-t_B}\left[\frac{t_A}{(1-t_B)}\frac{(1-t_A\sigma_n^*)}{(1-(1-t_B)\sigma_n^*)}\right]^n=1 \tag{7}$$

を満たす σ_n^* が存在する。この σ_n^* による混合戦略 $(\sigma_A, \sigma_B)=(\sigma_n^*, 0)$ に対して，$s_i=A$ 側での混合戦略は最適反応に含まれる。また，補題1から，混合戦略 $(\sigma_A, \sigma_B)=(\sigma_n^*, 0)$ に対する $s_i=B$ 側での最適反応条件式は，

$$L_B(\sigma_n^*, 0)=\frac{q}{1-q}\frac{1-t_A}{t_B}\left[\frac{t_A}{(1-t_B)}\frac{(1-t_A\sigma_n^*)}{(1-(1-t_B)\sigma_n^*)}\right]^n<1$$

であるので，B に投票するのが最適である。したがって，$(\sigma_A, \sigma_B)=(\sigma_n^*, 0)$ は均衡である。

また，σ_n^* を定める式(7)の左辺は，事前確率 q について単調増加であり，補題 2 から σ_n^* について単調減少なので，σ_n^* は q に対して単調増加である。

他の場合についても同様に示すことができる。(証明終)

3.2　コンドルセ陪審定理

以下では，定理 1 で示した均衡においてコンドルセ陪審定理が成り立つことを示す。集団の規模が大きくなったときに，均衡戦略がどのような戦略になるかを調べる。集団の規模が $2n+1$ 人であるとき，定理 1 で示した対称切替戦略のうち，$s_i=A$ 側で混合する戦略に注目する。シグナル $s_i=A$ 側での最適反応条件式(4)の左辺が $L_A(\sigma_n^*, 0)=1$ ならば，$s_i=A$ 側で混合する戦略が最適反応になるので，混合戦略 $(\sigma_n^*, 0)$ は均衡になる。補題 2 から $L_A(\sigma, 0)$ は σ に対して単調減少であり，さらに(3)より $\frac{t_A}{1-t_B}>1$ および $\frac{t_A}{1-t_B}\frac{1-t_A}{t_B}<1$ であるので $\lim_{n\to\infty}L_A(0, 0)>1>\lim_{n\to\infty}L_A(1, 0)$ が成り立つことから，n が十分大きい場合には，切替戦略による均衡は $s_i=A$ 側で確率的に投票する形になる。[6)] さらに，Feddersen and Pesendorfer (1998) や Duggan and Martinelli (2001) などで示されているように，均衡における混合戦略は事前確率 q によらず

$$\frac{t_A}{(1-t_B)}\frac{(1-t_A\bar{\sigma}^*)}{(1-(1-t_B)\bar{\sigma}^*)}=1 \tag{8}$$

を満たす $\bar{\sigma}^*$ に収束する。この式(8)を $\bar{\sigma}^*$ について解くと

$$\bar{\sigma}^*=\frac{1}{t_A+(1-t_B)}$$

である。この混合確率のもとでの，それぞれの状態 $w\in\{A, B\}$ における各メンバーの正解への投票確率は

$$\begin{aligned}\gamma_A(\bar{\sigma}^*, 0)&=t_A\bar{\sigma}^*\\&=\frac{t_A}{t_A+(1-t_B)}\\\gamma_B(\bar{\sigma}^*, 0)&=(1-t_B)(1-\bar{\sigma}^*)+t_B\\&=\frac{t_A}{t_A+(1-t_B)}\end{aligned}$$

である。さらに，

$$\frac{t_A}{t_A+(1-t_B)}>\frac{1}{2}\Leftrightarrow t_A>1-t_B$$

であるので，（3）より，$\lim_{n\to\infty}\gamma_A(\sigma_n^*, 0)=\lim_{n\to\infty}\gamma_B(\sigma_n^*, 0)>1/2$ が成り立つ。集団の規模が大きいときに，それぞれの状態における各メンバーの正解への投票確率は 1/2 を上回っているので，大数の法則により，それぞれの状態において多数決が正解を選ぶ確率はともに 1 に収束する。このことから，この均衡における事前期待効用＝期待正解確率

$$\begin{aligned} U(\sigma_A^*, \sigma_B^*) &= \sum_{w,d}\Pr(w)\Pr(d\,|\,w)u(d\,|\,w) \\ &= \sum_{w\in\{A,B\}}\Pr(w)\Pr(d=w\,|\,w) \end{aligned}$$

も $\lim_{n\to\infty}U(\sigma_n^*, 0)=1$ となるので，定理 1 で示した均衡においてコンドルセ陪審定理が成立する。

定理 2　コンドルセ陪審定理が成り立つ対称戦略均衡が存在する。

4. お　わ　り　に

本論文では二値シグナルモデルにおいて，シグナルのどちらの値も一方の状態で 1/2 より大きい確率で実現することを仮定したとしても，コンドルセ陪審定理が成り立つ対称戦略均衡が存在することを示した。本論文で示したコンドルセ陪審定理が成り立つ均衡は，Wit（1998）や Feddersen and Pesendorfer（1998）と同様の混合戦略による均衡である。したがって，二値シグナルの実現確率を単調尤度比条件を満たすという形に一般化したとしても，Wit（1998）や Feddersen and Pesendorfer（1998）が示したコンドルセ陪審定理は引き続き成立することが示された。

注

1）Feddersen and Pesendorfer（1998）は，全員一致ルールのもとではコンドルセ陪審定理が成り立たないことも示した。

2）戦略的投票とコンドルセ陪審定理に関する展望は，たとえば Gerling et al.（2005）を参照せよ。

3）二値シグナルモデルにおける効率的非対称均衡については，Ladha et al.（2003）や Kawamura and Vlaseros（2017）なども参照せよ。

4）単調尤度比条件（1）の不等号が逆向きの $\frac{t_A}{1-t_B}<\frac{1-t_A}{t_B}$ となる場合については，次のように考えればよい。シグナル $s_i'\in\{A', B'\}$ を，シグナル $s_i=B$ が実現した場合は $s_i'=A'$ として，シグナル $s_i=A$ が実現した場合は $s_i'=B'$ とせよ。このとき，$t_A'=1-t_A$ および $t_B'=1-t_B$ とす

れば，このシグナル $s_i' \in \{A', B'\}$ の実現確率は

$$\frac{\Pr(s_i'=A' \mid w=A)}{\Pr(s_i'=A' \mid w=B)} > \frac{\Pr(s_i'=B' \mid w=A)}{\Pr(s_i'=B' \mid w=B)} \Leftrightarrow \frac{t_A'}{1-t_B'} > \frac{1-t_A'}{t_B'}$$

を満たす。

5）Austen-Smith and Banks（1996）などでは，シグナルの実現確率について

$$\Pr(s_i=A \mid w=A)=t_A>1/2$$
$$\Pr(s_i=B \mid w=B)=t_B>1/2$$

を仮定している。この仮定のもとでは，（1）で表される単調尤度比条件 $\frac{t_A}{1-t_B} > \frac{1-t_A}{t_B}$ が成り立つ。

6）したがって，戦略 $(\sigma_A, \sigma_B)=(1, 0)$ は均衡にならない。

参考文献

Austen-Smith, David and Jeffrey S Banks（1996）"Information Aggregation, Rationality, and the Condorcet Jury Theorem," *American Political Science Review*, Vol. 90, pp. 34-45.

Ben-Yashar, Ruth（2014）"The Generalized Homogeneity Assumption and the Condorcet Jury Theorem," *Theory and Decision*, Vol. 77, pp. 237-241.

Chakraborty, Archishman and Parikshit Ghosh（2003）"Efficient Equilibria and Information Aggregation in Common Interest Voting Games," *Working paper*.

Duggan, John and César Martinelli（2001）"A Bayesian Model of Voting in Juries," *Games and Economic Behavior*, Vol. 37, pp. 259-294.

Feddersen, Timothy and Wolfgang Pesendorfer（1998）"Convicting the Innocent: The Inferiority of Unanimous Jury Verdicts under Strategic Voting," *American Political Science Review*, Vol. 92, pp. 23-35.

Gerling, Kerstin, Hans Peter Grüner, Alexandra Kiel, and Elisabeth Schulte（2005）"Information Acquisition and Decision Making in Committees: A Survey," *European Journal of Political Economy,* Vol. 21, pp. 563-597.

Kawamura, Kohei and Vasileios Vlaseros（2017）"Expert Information and Majority Decisions," *Journal of Public Economics*, Vol. 147, pp. 77-88.

Ladha, Krishna, Gary Miller, and Joseph Oppenheimer（2003）"Information Aggregation by Majority Rule: Theory and Experiments," *Working paper*.

McLennan, Andrew（1998）"Consequences of the Condorcet Jury Theorem for Beneficial Information Aggregation by Rational Agents," *American Political Science Review*, Vol. 92, pp. 413-418.

Wit, Jörgen（1998）"Rational Choice and the Condorcet Jury Theorem," *Games and Economic Behavior*, Vol. 22, pp. 364-376.