競合する３施設の最適配置戦略について

塩　出　省　吾
葉　　　光　毅
夏　　　皓　清

1. は じ め に

競合する施設の配置問題に関する研究は H. Hotelling（[１]）によるナッシュ均衡解に関する導入的研究に始まり，その後多くの研究者によって様々な発展的研究がなされてきた。また，S. L. Hakimi（[２]）と Z. Drezner（[３]）はシュタッケルベルグ均衡解を競合配置問題に導入した。

互いに競合する施設の最適配置に関する解析は，その難しさゆえ２施設で考えられることが多かった。しかし，現実には２施設に限定するのではなく，もっと一般的な場合を考えなければならない。塩出（[４，５]）は競合する３施設の配置問題を考えたが，それらの論文では３施設のうち１施設については最初から配置されているものであった。そこで，本論文では直線市場で，需要が１つの区間［s, t］上で一様に分布する場合において，互いに競合する３施設のシュタッケルベルグ均衡配置問題を考え，３つの施設各々の最適な配置について考える。当然のことではあるが，直線上の競合配置問題においては３施設では，ナッシュ均衡解が存在しないことは一般によく知られている。

2. 問題の定式化

需要が１つの区間［s, t］上に一様に分布している直線市場を考える。今この市場に，互いに競合する３つの施設 A, B, C がこの順に参入してくるとする。すなわち，まず施設 A がこの市場に入ってくるのであるが，競争相手である施設 B および C も後から同じ市場に入ってくることを知っている。施設 B は先に配置された施設 A の位置を知った上で，後から入ってくる施設 C が，施設 A と B の配置状態を見て最適に配置することを知っている。ここで，各施設の最適化は３つの施設が配置されたとき，それぞれ獲得する需要が最大になっていることを表す。また，各顧客は最も自分に近い施設を利用すると仮定

する。

直線上における3つの施設A, B, Cの位置をそれぞれa, b, cとする。同じ位置には2つ以上の施設は配置できないので，これら3つの施設の位置関係によって次の6通りの場合

(1) $a<b<c$　(2) $a<c<b$　(3) $b<a<c$

(4) $b<c<a$　(5) $c<a<b$　(6) $c<b<a$

を考える必要がある。

3つの施設は需要量を獲得するのが目的であるので，需要が存在する区間［s, t］の外には配置することは考えられない。この区間内において3つの位置である左側，真ん中，右側が3つの施設A, B, Cのいずれかに対応するのである。例えば，3つの施設が上の(2)のように$s<a<c<b<t$となっている場合，3つの施設A, B, Cが獲得する需要量をそれぞれW_A, W_B, W_Cとすると，

$$W_A=\frac{W}{t-s}\left(\frac{a+c}{2}-s\right)$$

$$W_C=\frac{W}{t-s}\left(\frac{b-a}{2}\right)$$

$$W_B=\frac{W}{t-s}\left(t-\frac{b+c}{2}\right)$$

で表される。（ここで，Wはこの市場の全需要量である。）その他の5つの場合に対しては，その位置関係によってa, b, cを入れ替えれば良い。

本モデルでは配置の順序はA, B, Cの順で3段階の意思決定問題になる。第1段の問題としては施設Aの配置になるが，後からそれぞれ最適に配置される施設B, Cの位置を考慮して配置しなければならない。次に第2段問題としての施設Bの配置であるが，施設Aの配置情報を利用するのであるが，後から施設A, Bの配置情報を使って最適に配置される施設Cのことも考慮して配置しなければならない。最後に第3段問題としての施設Cの配置であるが，この時点では既に施設AとBは配置されているのでその配置情報を使って最適な配置を決定する。

以上のことより，本論文では第3段の施設Cの最適配置戦略を先に検討し，それを用いて第2段の施設Bの最適配置戦略を考え，さらに施設BとCの最適戦略を考慮して第1段の施設Aの最適配置戦略を考える。

3. 施設Cの最適配置戦略

競合する施設A, Bがそれぞれ直線座標の a, b に配置されているとする。このとき a, b の大小によって施設Cの最適配置戦略が異なってくる。

3.1　$s<a<b<t$ の場合

この場合において，施設Cの配置としては3つの区間を考える。

（1）　$s<c<a$ の場合

この区間に配置すると，Cはできるだけ多くの需要を獲得するためには施設Aに隣接する位置に配置することである。このときCの獲得する需要量は

$$W_C=\frac{W}{t-s}(a-s)$$

である。

（2）　$a<c<b$ の場合

この区間においてはどの位置に配置してもCの獲得する需要量は同じ値

$$W_C=\frac{W}{t-s}\left(\frac{b-a}{2}\right)$$

である。

（3）　$b<c<t$ の場合

この場合は（1）と同様にCはできるだけ多くの需要を獲得するためには施設Bに隣接する位置に配置することである。このときCの獲得する需要量は

$$W_C=\frac{W}{t-s}(t-b)$$

である。

これら3つの場合を考えて，Cは獲得する需要量が最大になる位置，すなわち

$$\max\left\{\frac{W}{t-s}(a-s),\ \frac{W}{t-s}\left(\frac{b-a}{2}\right),\ \frac{W}{t-s}(t-b)\right\}$$

を与える位置に配置する。

2つの値 a, b に関して上の（1）から（3）に対応して，それぞれ最適解を与える領域を与える。

①　施設Aに左から隣接して配置することが最適である領域

$$\{(a,\ b)\,|\,a<b\leq t,\ b<3a-2s,\ b>s+t-a\}$$

②　2施設A, B間の任意の位置に配置することが最適である領域

$$\left\{(a,\ b)\middle|\frac{a}{3}+\frac{2t}{3}<b\leq t,\ b>3a-2s,\ s\leq a\right\}$$

③　施設Bに右から隣接して配置することが最適である領域

$$\left\{(a,\ b)\middle|a<b<\frac{a}{3}+\frac{2t}{3},\ b<s+t-a,\ s\leq a\right\}$$

3.2　$s<b<a<t$ の場合

この場合は3.1の場合と同様に考えると，次の④から⑥の領域を与えることができる。

④　施設Bに左から隣接して配置することが最適である領域

$$\left\{(a,\ b)\middle|\frac{a}{3}+\frac{2s}{3}<b<a,\ b>s+t-a,\ a\leq t\right\}$$

⑤　2施設B, A間の任意の位置に配置することが最適である領域

$$\left\{(a,\ b)\middle|s\leq b<\frac{a}{3}+\frac{2s}{3},\ b<3a-2t,\ a\leq t\right\}$$

⑥　施設Aに右から隣接して配置することが最適である領域

$$\{(a,\ b)\,|\,s\leq b<a,\ 3a-2t<b<s+t-a\}$$

これら6つの場合を図1で表す。

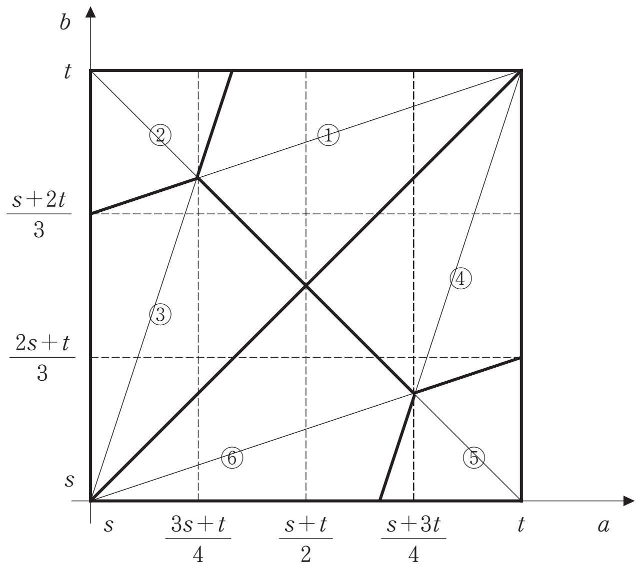

図1．施設Cの最適配置戦略と（a, b）領域

4. 施設Bの最適配置戦略

施設Cの最適配置戦略を用いた施設Bの最適配置戦略であるが，各領域に対して検討する。①の領域では施設Bの獲得する需要量は

$$W_B=\frac{W}{t-s}\left(t-\frac{a+b}{2}\right)$$

であるから，b を小さくすることによって W_B は大きくなる。次に②の領域では

$$W_B=\frac{W}{t-s}\left(t-\frac{b+c}{2}\right)$$

であるから，この場合も b を小さくすることによって W_B は大きくなる。さらに，③の領域では

$$W_B=\frac{W}{t-s}\left(\frac{b-a}{2}\right)$$

となり，b は大きくすることによって W_B は大きくなる。④の領域では

$$W_B=\frac{W}{t-s}\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

で，b を小さくすることによって W_B は大きくなる。⑤の領域では

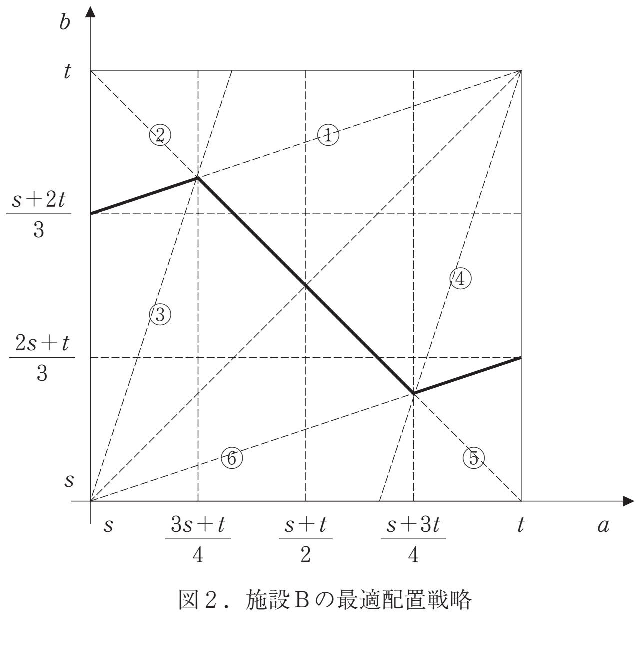

図2．施設Bの最適配置戦略

$$W_B=\frac{W}{t-s}\left(\frac{b+c}{2}\right)$$

で，b は大きくすることによって W_B は大きくなる。最後に⑥の領域では

$$W_B=\frac{W}{t-s}\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

で，b は大きくすることによって W_B は大きくなる。

これらを総合すると施設 A の各配置 a に対する施設 B の最適配置戦略は図 2 の太線で表される。

5．施設 A の最適配置戦略

施設 B の最適配置戦略の中で施設 A にとって W_A を最大にする配置 a を決定したい。ここでは a に関する 4 つの区間に分けて検討する。

（1）　区間 $s<a<\frac{3s+t}{4}$

この区間の施設 B の最適配置戦略は②および③の境界である。すなわち各 a に対して施設 B は $\frac{a+2t}{3}$ に配置する。②では $W_A=\frac{W}{t-s}\left(\frac{a+c}{2}-s\right)$ となり，a に関して単調増加である。また，③では $W_A=\frac{W}{t-s}\left(\frac{a+b}{2}-s\right)$ となり，この場合も a に関して単調増加である。すなわち，この区間では a は大きい方が良いことになる。

（2）　区間 $\frac{3s+t}{4}<a<\frac{s+t}{2}$

この区間の施設 B の最適配置戦略は①と③の境界である。各 a に対して施設 B は $-a+s+t$ に配置する。①では $W_A=\frac{W}{t-s}\left(\frac{b-a}{2}\right)$ となり，a に関して単調減少である。また，③では $W_A=\frac{W}{t-s}\left(\frac{a+b}{2}-s\right)$ となり，この場合は a に関して単調増加である。このままでは a に関して増加させるのか減少させるのか決まらないが，A が配置した後に配置の決定をする B を考えると，①では $W_B=\frac{W}{t-s}\left(t-\frac{a+b}{2}\right)$ であり，③では $W_B=\frac{W}{t-s}\left(\frac{b-a}{2}\right)$ であるが，

$$\frac{W}{t-s}\left(t-\frac{a+b}{2}\right)>\frac{W}{t-s}\left(b-\frac{a+b}{2}\right)=\frac{W}{t-s}\left(\frac{b-a}{2}\right)$$

であるので施設Ｂは①を選ぶのである。その結果この区間では a は小さい方が良いことになる。

（３） 区間 $\frac{s+t}{2}<a<\frac{s+3t}{4}$

この区間の施設Ｂの最適配置戦略は④と⑥の境界である。この場合も上と同様に各 a に対して施設Ｂは $-a+s+t$ に配置する。④では $W_A=\frac{W}{t-s}\left(t-\frac{a+b}{2}\right)$ で，a に関して単調減少である。また，⑥では $W_A=\frac{W}{t-s}\left(\frac{a-b}{2}\right)$ で，この場合は a に関して単調増加である。（２）と同様に施設Ｂの配置戦略を考えると，④では $W_B=\frac{W}{t-s}\left(\frac{a-b}{2}\right)$ であり，⑥では $W_B=\frac{W}{t-s}\left(\frac{a+b}{2}-s\right)$ であるが，

$$\frac{W}{t-s}\left(\frac{a-b}{2}\right)=\frac{W}{t-s}\left(\frac{a+b}{2}-b\right)<\frac{W}{t-s}\left(\frac{a+b}{2}-s\right)$$

であるので施設Ｂは⑥を選ぶのである。その結果，この区間では a は大きい方が良いことになる。

（４） 区間 $\frac{s+3t}{4}<a<t$

この区間の施設Ｂの最適配置戦略は④と⑤の境界である。すなわち各 a に対して施設Ｂは $\frac{a+2s}{3}$ に配置する。④では $W_A=\frac{W}{t-s}\left(t-\frac{a+b}{2}\right)$ で，a に関して単調減少である。また，⑤では $W_A=\frac{W}{t-s}\left(t-\frac{a+c}{2}\right)$ で，この場合も a に関して単調減少である。すなわち，この区間では a は小さい方が良いことになる。

6．３施設の最適戦略

上のことより，施設Ａの最適戦略は $\frac{3s+t}{4}$ または $\frac{s+3t}{4}$ に配置することである。これに対して施設Ｂの最適戦略はそれぞれ $\frac{s+3t}{4}$ または $\frac{3s+t}{4}$ に配置することである。この結果に対して施設Ｃは $\frac{3s+t}{4}$ に配置される施設の左に隣接，$\frac{3s+t}{4}$ に配置される施設の右に隣接，または $\frac{3s+t}{4}$ と $\frac{s+3t}{4}$ に挟まれた領域の任意の位置に配置するのが最

適である。施設 A, B, C の最適な配置をそれぞれ a^*, b^*, c^* とすると，最適配置戦略はまとめると，次の2通りになる。

6.1　$\boldsymbol{a^*=\frac{3s+t}{4}}$; $\boldsymbol{b^*=\frac{s+3t}{4}}$ のとき

（1）　施設 C が施設 A の左に隣接して配置

このとき，それぞれの最適値は $W_A^*=\frac{W}{4}$, $W_B^*=\frac{W}{2}$, $W_C^*=\frac{W}{4}$ である。

（2）　施設 C が施設 B の右に隣接して配置

このとき，それぞれの最適値は $W_A^*=\frac{W}{2}$, $W_B^*=\frac{W}{4}$, $W_C^*=\frac{W}{4}$ である。

（3）　施設 C が施設 A と B の間に配置

このとき，それぞれの最適値は

$$\frac{W}{4}< W_A^*=\frac{W}{t-s}\left(\frac{3s+t+4c}{8}-s\right)<\frac{W}{2}$$

$$\frac{W}{4}< W_B^*=\frac{W}{t-s}\left(t-\frac{s+3t+4c}{8}-s\right)<\frac{W}{2}$$

$$W_C^*=\frac{W}{4}$$

施設 C の獲得する需要量は一定値 $\frac{W}{4}$ であるが，施設 A と B については最小 $\frac{W}{4}$，最大 $\frac{W}{2}$ であることがわかる。

6.2　$\boldsymbol{a^*=\frac{s+3t}{4}}$; $\boldsymbol{b^*=\frac{3s+t}{4}}$ のとき

（1）　施設 C が施設 B の左に隣接して配置

このとき，それぞれの最適値は $W_A^*=\frac{W}{2}$, $W_B^*=\frac{W}{4}$, $W_C^*=\frac{W}{4}$ である。

（2）　施設 C が施設 A の右に隣接して配置

このとき，それぞれの最適値は $W_A^*=\frac{W}{4}$, $W_B^*=\frac{W}{2}$, $W_C^*=\frac{W}{4}$ である。

（3）　施設 C が施設 A と B の間に配置

このとき，それぞれの最適値は

$$\frac{W}{4} < W_A^* = \frac{W}{t-s}\left(t - \frac{s+3t+4c}{8} - s\right) < \frac{W}{2}$$

$$\frac{W}{4} < W_B^* = \frac{W}{t-s}\left(\frac{3s+t+4c}{8} - s\right) < \frac{W}{2}$$

$$W_C^* = \frac{W}{4}$$

この場合も同様に，施設Ｃの獲得する需要量は一定値 $\frac{W}{4}$ であるが，施設ＡとＢについては最小 $\frac{W}{4}$，最大 $\frac{W}{2}$ であることがわかる。

7. お　わ　り　に

本論文では，直線市場で互いに競合する３施設のシュタッケルベルグ均衡配置問題を解いた。３施設のナッシュ均衡配置問題の解は存在しないことが知られているが，シュタッケルベルグ均衡配置問題の解を明白に示したものはこれまでになかった。

今後の発展としては，需要分布が一様でなく一般の分布に従う場合を検討する必要があるが，比較的簡単な分布については本論文のモデルを修正することで比較的容易に対応できるであろう。

参　考　文　献

［1］ Hotelling, H.（1929）“Stability in Competition,” *Economic Journal* 39, 41-57.

［2］ Hakimi, S. L.（1983）“On Locating New Facilities in a Competitive Environment,” *European Journal of Operational Research* 12, 29-35.

［3］ Drezner, Z.（1982）“Competitive Location Strategies for Two Facilities,” *Regional Science and Urban Economics* 12, 485-493.

［4］ 塩出省吾（2003）“競合する３施設の配置問題―需要が一様に分布している場合―,” 神戸学院経済学論集，第35巻第１・２号，45-58.

［5］ 塩出省吾（2007）“直線市場の競合する３施設の配置問題,” 神戸学院経済学論集，第39巻第１・２号，51-63.

［6］ Drezner, Z. and Hamacher, H. W. editors（2004）Facility Location―Applications and Theory, Springer, Berlin.