高速道路の最適配置計画

塩　出　省　吾
葉　　光　毅
夏　　皓　清

1. は　じ　め　に

複数の集落が存在する地域に直線状の高速道路を配置する。本論文では各集落から高速道路への重み付き距離の総和を最小にするような高速道路を設置する問題を考える。各集落に付随する重みは各集落の住人が高速道路を利用する頻度に比例するもので，各集落から高速道路へは最短経路でアプローチし，その総移動距離が最小になるような高速道路の配置計画となる。高速道路は現実には直線とはいえないが，小さな区域に限れば直線と仮定しても大きな違いはないと思われる。

本論文では，直線状の高速道路を配置する計画であるので，平面上の直交座標系において高速道路をあらわす直線を確定するために，y 切片と直線が x 軸となす勾配を決めなければならない。これは具体的には2変数を決定する問題であるので，2変数を同時に決定するのは一般的には容易ではない。そこで本論文では2段階の定式化を行う。まず，x 軸となす傾きを固定した問題（第2段問題）を考える。この問題は基本的な一次元のWeber 配置問題に変換され，容易に解が与えられることが示される。これを2段階問題の解法に用いて，x 軸となす傾きを含めて探索する2次元の決定問題の最適解を見つける解法を提案する。

2. 問題の定式化

平面であらわされる空間を考え，この中に n 個の集落を表す需要点 (a_i, b_i), $i=1, 2, \cdots, n$ が存在するとする。各需要点 (a_i, b_i) には重みが付随しており，それぞれ w_i, $i=1, 2, \cdots, n$ で与えられるとする。この平面に直線状の高速道路 L を配置する。本論文では各需要点から高速道路へ距離の総加重和を最小にするように高速道路 L の設置計画を考える。いま高速道路 L が直交座標系の x 軸となす角を θ $\left(\text{ただし，} -\dfrac{\pi}{2}<\theta\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。

直線の式で表すと，$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ のときは $y=\tan\theta\cdot x+c$ で，$\theta=\frac{\pi}{2}$ のときは $x=d$ となる。$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ のときの需要点（a_i, b_i）と直線 $y=\tan\theta\cdot x+c$ の間の距離は $|a_i\sin\theta+(c-b_i)\cos\theta|$ で与えられるので最小化する目的関数は

$$f(\theta, c)=\sum_{i=1}^{n} w_i|a_i\sin\theta+(c-b_i)\cos\theta|$$

と表わされる。ここで，われわれの問題は直線が x 軸となす角 θ と，y 切片 c をこの目的関数 $f(\theta, c)$ が最小となるように決定することである。$\theta=\frac{\pi}{2}$ の場合には需要点（a_i, b_i）と高速道路 L との距離は $|d-a_j|$ となり，目的関数は

$$f\left(\frac{\pi}{2}, d\right)=\sum_{j=1}^{n} w_j|d-a_j|$$

となる。これら2つの式を一緒にすると

$$f(\theta, c)=\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} w_j|a_i\sin\theta+(c-b_i)\cos\theta| & \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)\\ \sum_{j=1}^{n} w_j|d-a_j| & \left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

とまとめられるので，このまとめた目的関数 $f(\theta, c)$ を用いた2段階定式化は次のようになる。

$\boxed{\text{2段階問題}}$

区間 $-\frac{\pi}{2}<\theta\leq\frac{\pi}{2}$ のもとで $f(\theta, c)$ を最小にする θ および c を見つける。

上でも述べたようにこの2段階問題では θ および c を決定するのであるが，両変数を同時に決定するのは難しいので，θ を固定した次の第2段問題を考える。

$\boxed{\text{第2段問題}}$

区間 $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ 内の固定した各 θ に対して目的関数 $f(\theta, c)$ を最小にする $c=c(\theta)$ を見つける。

各 θ に対する第2段問題の最適解 $c=c(\theta)$ を用いると上の2段階問題は次の等価な2段階問題として表わされる。

$\boxed{\text{等価な2段階問題}}$

区間 $-\dfrac{\pi}{2}<\theta\leq\dfrac{\pi}{2}$ のもとで目的関数 $f(\theta, c(\theta))$ を最小にする θ を見つける。

本論文ではすべての需要点 (a_i, b_i), $i=1, 2, \cdots, n$ に対して

$a_i<a_j$　なら　$i<j$

$a_i=a_j$　かつ　$b_i<b_j$　なら　$i<j$

と仮定する。すなわち，需要点の添え字に関しては辞書式順序に従っていると仮定する。いま，任意の2つの需要点 (a_i, b_i), (a_j, b_j), $(i<j)$ に対して

$$\tan\theta_{ij}=\frac{b_j-b_i}{a_j-a_i}$$

とおく。このとき次のことが成り立つ。

(1)　$-\pi/2<\theta<\theta_{ij}$ なら，(a_i, b_i) を通る x 軸となす角 θ の直線は (a_j, b_j) を通る x 軸となす角 θ の直線より下にある。

(2)　$\pi/2\geq\theta>\theta_{ij}$ なら，(a_i, b_i) を通る x 軸となす角 θ の直線は (a_j, b_j) を通る x 軸となす角 θ の直線より上にある。

このことより，x 軸となす角 θ の直線に対する上下の位置関係が入れ替わるのは，θ がいずれかの θ_{ij} に一致するときのみであることがわかる。

3．第2段問題の解法

本論文における問題は2変数の決定問題であるので，まず角 θ を固定して，そのときの最適な y 切片 $c=c(\theta)$ を決定する。各需要点と高速道路との距離は最短経路を取るので，需要点から高速道路に下ろした垂線の長さで表され，c の変化は単なる平行移動を表すので，座標軸を θ だけ回転させることを考える。この新しい直交座標系 X-Y では元の座標軸における需要点 (a_i, b_i) は

$$(p_i, q_i)=(a_i\cos\theta+b_i\sin\theta, -a_i\sin\theta+b_i\cos\theta)$$

と表わされる。新しい座標軸では高速道路は X 軸に平行であるので，これらの需要点から直線までの距離は新しい Y 座標のみを用いて表すことができる。すなわち一次元の重み付き最小和施設配置問題になる。この問題では需要点の Y 座標である $q_i=-a_i\sin\theta+b_i\cos\theta$ にその需要点の重みが w_i となり，その最適解は重み付きのメディアンで与えられることが容易にわかる。いま，需要点の Y 座標を

$$q_i=-a_i\sin\theta+b_i\cos\theta,\ i=1, 2, \cdots, n$$

とする。ここで，q_j がメディアンであるとすると，

$$\sum_{q_i<q_j} w_i \leq \sum_{q_i\geq q_j} w_i \quad \text{かつ} \quad \sum_{q_i\leq q_j} w_i \geq \sum_{q_i>q_j} w_i$$

である。

ここで，角 θ を固定したときの第2段問題の目的関数を最小にする c は $c(\theta)$ であるので，目的関数は

$$f(\theta, c(\theta)) = \min_c \sum_{i=1}^{n} w_i |a_i \sin\theta + (c - b_i)\cos\theta|$$

と表わされる。

4. 等価な2段階問題の解法

前節の第2段問題では固定された θ のもとで c を決定することを考え，どのような θ でも解はメディアンで与えられることが示された。すなわち，直線状の高速道路はいずれかの需要点を通る位置で最適になる。本節では2段階問題の最適化を進めるために θ に関する解析を行う。

前節の計算された目的関数の式は

$$f(\theta, c(\theta)) = \sum_{i=1}^{n} w_i |(a_i - a_j)\sin\theta + (b_j - b_i)\cos\theta|$$

である。この関数の θ に関する変化を見れば良いが，この式には絶対値がついているので計算を簡単にするために θ に関する最適な直線が1つだけの需要点を通る場合と複数個の需要点を通る場合に分けて考える。

4.1　1つだけの需要点を通る場合

ここでは高速道路は1つの需要点 (a_j, b_j) のみを通る場合を考えるのであるから，目的関数はこの直線で区切られた2つの半平面それぞれに属する需要点で表現される。

$$\begin{aligned} f(\theta, c(\theta)) = &\sum_{i\in I_1} w_i \{(a_j - a_i)\sin\theta + (b_i - b_j)\cos\theta\} \\ &+ \sum_{i\in I_2} w_i \{(a_i - a_j)\sin\theta + (b_j - b_i)\cos\theta\} \end{aligned}$$

ここで

$$I_1 = \{i \mid b_i > \tan\theta \cdot a_i + c(\theta)\} \quad \text{および} \quad I_2 = \{i \mid b_i < \tan\theta \cdot a_i + c(\theta)\}$$

である。θ に関する変化は関数を微分すると

$$\begin{aligned} \frac{df(\theta, c(\theta))}{d\theta} = &\sum_{i\in I_1} w_i \{(a_j - a_i)\cos\theta + (b_j - b_i)\sin\theta\} \\ &+ \sum_{i\in I_2} w_i \{(a_i - a_j)\cos\theta + (b_i - b_j)\sin\theta\} \end{aligned}$$

になる。さらに $\cos\theta$ と $\sin\theta$ でそれぞれまとめると

$$\frac{df(\theta, c(\theta))}{d\theta}=\left\{\sum_{i\in I_1} w_i(a_j-a_i)+\sum_{i\in I_2} w_i(a_i-a_j)\right\}\cos\theta$$
$$+\left\{\sum_{i\in I_1} w_i(b_j-b_i)+\sum_{i\in I_2} w_i(b_i-b_j)\right\}\sin\theta$$

が得られる。いま

$$\begin{cases} \dfrac{df(\theta, c(\theta))}{d\theta}>0 \text{ のときは } \theta \text{ を減少させると } f(\theta, c(\theta)) \text{ は減少する。} \\ \dfrac{df(\theta, c(\theta))}{d\theta}<0 \text{ のときは } \theta \text{ を増加させると } f(\theta, c(\theta)) \text{ は減少する。} \end{cases}$$

であるので，

$$\frac{df(\theta, c(\theta))}{d\theta}=\left\{\sum_{i\in I_1} w_i(a_j-a_i)+\sum_{i\in I_2} w_i(a_i-a_j)\right\}\cos\theta$$
$$-\left\{\sum_{i\in I_1} w_i(b_i-b_j)+\sum_{i\in I_2} w_i(b_j-b_i)\right\}\sin\theta>0$$

ならば，$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ に対して $\cos\theta>0$ であるので

$$\left\{\sum_{i\in I_1} w_i(b_i-b_j)+\sum_{i\in I_2} w_i(b_j-b_i)\right\}\tan\theta<\sum_{i\in I_1} w_i(a_j-a_i)+\sum_{i\in I_2} w_i(a_i-a_j)$$

となる。いま，θ が変化したときは直線が次の需要点に達するまで I_1 と I_2 の要素に変化はしない。

さて，

$$\sum_{i\in I_1} w_i(b_i-b_j)+\sum_{i\in I_2} w_i(b_j-b_i)>0$$

のときは

$$\tan\theta<\frac{\sum_{i\in I_1} w_i(a_j-a_i)+\sum_{i\in I_2} w_i(a_i-a_j)}{\sum_{i\in I_1} w_i(b_i-b_j)+\sum_{i\in I_2} w_i(b_j-b_i)}$$

となり，$\tan\theta$ は単調増加関数であるので θ を減少させると $\tan\theta$ も減少し，この不等式は同様に成立する。ゆえに θ が減少し次の需要点に到達するまで単調に減少する。また，

$$\sum_{i\in I_1} w_i(b_i-b_j)+\sum_{i\in I_2} w_i(b_j-b_i)<0$$

のときは

$$\tan\theta>\frac{\sum_{i\in I_1} w_i(a_j-a_i)+\sum_{i\in I_2} w_i(a_i-a_j)}{\sum_{i\in I_1} w_i(b_i-b_j)+\sum_{i\in I_2} w_i(b_j-b_i)}$$

となり，θ が増加すると $\tan\theta$ も増加し，この不等式は同様に成立する。ゆえにこの場合

は次の需要点に到達するまで増加させる範囲は増加するので，この範囲に最小値はないことがわかる。θ を減少させると次の需要点に到達するまでに $\tan\theta$ が不等式の右辺の値に達しなければ次の需要点まで減少することになり，もし次の需要点までに達するなら，そのときの θ まで減少する。そこがこの区間における最小値である。

次に，逆の不等式になる場合を考える。

$$\frac{df(\theta, c(\theta))}{d\theta}=\left\{\sum_{i\in I_1} w_i(a_j-a_i)+\sum_{i\in I_2} w_i(a_i-a_j)\right\}\cos\theta$$
$$-\left\{\sum_{i\in I_1} w_i(b_i-b_j)+\sum_{i\in I_2} w_i(b_j-b_i)\right\}\sin\theta<0$$

のときは

$$\left\{\sum_{i\in I_1} w_i(b_i-b_j)+\sum_{i\in I_2} w_i(b_j-b_i)\right\}\tan\theta>\sum_{i\in I_1} w_i(a_j-a_i)+\sum_{i\in I_2} w_i(a_i-a_j)$$

となり，この不等式が成り立っていれば θ が増加すると $f(\theta, c(\theta))$ は減少することがわかる。

そこで，いま

$$\sum_{i\in I_1} w_i(b_i-b_j)+\sum_{i\in I_2} w_i(b_j-b_i)>0$$

のとき

$$\tan\theta>\frac{\sum_{i\in I_1} w_i(a_j-a_i)+\sum_{i\in I_2} w_i(a_i-a_j)}{\sum_{i\in I_1} w_i(b_i-b_j)+\sum_{i\in I_2} w_i(b_j-b_i)}$$

となり，θ が増加するとこの不等式は同様に成立するので，θ が増加し次の需要点に到達するまで増加させると $f(\theta, c(\theta))$ は減少する。また

$$\sum_{i\in I_1} w_i(b_i-b_j)+\sum_{i\in I_2} w_i(b_j-b_i)<0$$

のときは

$$\tan\theta<\frac{\sum_{i\in I_1} w_i(a_j-a_i)+\sum_{i\in I_2} w_i(a_i-a_j)}{\sum_{i\in I_1} w_i(b_i-b_j)+\sum_{i\in I_2} w_i(b_j-b_i)}$$

なので，θ が減少するとこの不等式は成立するので，次の需要点に到達するまで減少させると $f(\theta, c(\theta))$ は増加する。それゆえこの θ の区間には最小値は存在しないことがわかる。θ が増加すると，この不等式が成り立つとき $f(\theta, c(\theta))$ は減少するので，上と同様に，次の需要点に到達するまで不等式が成り立てば θ を増加させる。次の需要点に達するまでに不等式の右辺の値に達するなら，そのときがこの区間の最小値である。

4.2　2つ以上の需要点を通る場合

ここで，傾き $\tan\theta$ の直線がメディアンの位置で m 個の需要点 (a_{k_j}, b_{k_j}), $j=1, \cdots, m$ を通っているとする。（ここで，m 個の需要点は x 座標の小さいものから順に並んでいると仮定する。）すなわち，

$$\sum_{i\in I_1} w_i \leq \sum_{i\in I_2} w_i + \sum_{i=1}^{m} w_{k_i} \quad \text{かつ} \quad \sum_{i\in I_1} w_i + \sum_{i=1}^{m} w_{k_i} \geq \sum_{i\in I_2} w_i$$

が成り立っているとする。このとき，上と同様に θ が増加する場合と θ が減少する場合を考えなければならない。

(i)　θ が増加する場合

この場合では，

$$\sum_{i\in I_1} w_i + \sum_{i=1}^{j-1} w_{k_i} \leq \sum_{i\in I_2} w_i + \sum_{i=j}^{m} w_{k_i}$$

かつ

$$\sum_{i\in I_1} w_i + \sum_{i=1}^{j} w_{k_i} \geq \sum_{i\in I_2} w_i + \sum_{i=j+1}^{m} w_{k_i}$$

のとき，(a_{k_j}, b_{k_j}) を通る直線がメディアンである。

(ii)　θ が減少する場合

この場合では，

$$\sum_{i\in I_1} w_i + \sum_{i=j+1}^{m} w_{k_i} \leq \sum_{i\in I_2} w_i + \sum_{i=1}^{j} w_{k_i}$$

かつ

$$\sum_{i\in I_1} w_i + \sum_{i=j}^{m} w_{k_i} \geq \sum_{i\in I_2} w_i + \sum_{i=1}^{j-1} w_{k_i}$$

のとき，(a_{k_j}, b_{k_j}) を通る直線がメディアンである。

5. お　わ　り　に

本論文では，複数の需要点が存在する平面に高速道路のような直線状の施設を各需要点から重み付き距離の総和を最小にするように配置する問題を考えた。直線は傾きと y 切片で決定されるので2つの決定変数があり，同時の最適化は難しいので2段階定式化を行い，最適解を求める解法を示した。

本研究は神戸学院大学経営学会および台湾の国立成功大学の2007年度研究助成による研究成果である。

参　考　文　献

［１］ Drezner, Z., and Hamacher, H. W. (2002), *Facility Location: Application and Theory.* Springer-Verlag, New York.

［２］ Drezner Z., and Shiode, S. (2007), A Distribution Map for the One-Median Location Problem on a Network, *European Journal of Operational Research,* Vol. 179, pp. 1266-1273.

［３］ Love, R. F., Morris J. G., and Wesolowski, G. O. (1988), *Facilities Location: Models & Methods.* North-Holland, New York.

［４］ Morris, J. G., and Norback, J. P. (1980), Simple Approach to Linear Facility Location. *Transportation Science,* Vol. 14, pp. 1-8.

［５］ Morris, J. G., and Norback, J. P. (1983), Linear facility location —Solving extensions of the basic problem. *European Journal of Operational Research,* Vol. 12, pp. 90-94.

［６］ Okuhara, K., Yeh, Y.-K., Hsia, H.-C., Shiode, S., and Ishii, H. (2007), Derivation of Relations among Utility, Preference and Accesibility and Its Estimation for Urban Planning, *Asia Pacific Management Review,* Vol. 12 pp. 277-282.

［７］ Osumi, S., and Shiode, S. (2007) Location Game with Facility Dependent Fuzzy Demand, *Asia Pacific Management Review,* Vol. 12, pp. 283-289.

［８］ 塩出省吾（2003），競合する３施設の配置問題―需要が一様に分布している場合―，神戸学院経済学論集，第35巻第１・２号，pp. 45-58.

［９］ 塩出省吾（2004），町を横切る川に架ける橋の最適配置，神戸学院経済学論集，第35巻第４号，pp. 43-52.

［10］ 塩出省吾（2007），直線市場の競合する３施設の配置問題，神戸学院経済学論集，第39巻第１・２号，pp. 51-63.

［11］ Shiode, S., and Drezner, Z. (2003), A Competitive Facility Location Problem with Stochastic Weights. *European Journal of Operational Research* Vol. 149, pp. 47-52.