

収容時間を考慮した救急基地配置問題

塩 出 省 吾

要旨：本論文では、平面上のある多角形領域を考え、その領域内に複数の収容施設（病院）があり、救急車の基地を配置することを考える。そこで本論文では、救急基地から事故発生現場を経由して収容施設までの距離に関して、その救急基地のミニマックス型配置問題を考える。本研究では2点間の距離として直線距離と直角距離の2通りを考える。ここで、事故発生点は多角形領域上の無数の点を対象にしているが、実際は有限個の点を考えれば良いことを示す。それゆえ、この問題がメッセンジャーボーイの問題に帰着されることがわかる。具体的には、制限される有限個の需要点を求めメッセンジャーボーイ問題を作る。メッセンジャーボーイ問題は直線距離の場合には効率的な解法があり、直角距離の問題に対しては解は数式で示されており、簡単な計算で与えられる。

1. は じ め に

救急車を配置する基地としての救急施設の配置問題は、救急基地から緊急事故発生場所への距離を基準としたミニマックス型施設配置問題として定式化されることが最も一般で、これまでに非常に多くの研究がなされてきた。([1], [2]参照)しかし現実には、消防車に対する基地ならこれで十分であろうが、救急車なら事故発生現場に到着するまでの時間だけでは不十分で、実際に患者を収容施設に配送するまでの時間が重要であるので、救急基地から緊急事故発生現場を経由して収容施設までの距離を基準としたミニマックス型施設配置問題を考える必要があると思われる。

そこで本論文では、収容施設に患者を収容するまでの時間を基準とする問題を現実化にすることを具体的に考える。救急基地から事故発生現場および収容施設を回って再び救急基地に戻ってくるまでの距離、すなわち周回距離については、これまでいくつかの論文([3], [4])で研究されている。しかし、収容施設から救急基地に戻ってくる経路は、緊急性を要する他の部分、すなわち救急基地から事故発生現場までと事故発生現場から収容施設までの部分に比べてそれほど重要でないと思われるので、収容施設から救急基地

に戻ってくるまでの経路の部分の周回距離から除去したもの、すなわち上で述べた救急基地から事故発生現場を経由して収容施設までの経路の長さを本研究のミニマックス型配置に関する距離基準として考える。

本論文では、2点間の距離として2種類の距離、すなわち直線距離と直角距離を考える。一般的な距離の定義は存在するが、その中でも L_p ノルムが現実の配置モデルには適合し、特にこの中でも p が1または2を取るとき、すなわち L_1 ノルムおよび L_2 ノルムが現実的にはよく用いられる。ここで L_2 ノルムはユークリッド距離または直線距離とよばれ、ユークリッド空間上の2点を直線で結んだときの経路の長さである。また、 L_1 ノルムは2点間の距離は直交座標系で表したときの各座標における移動成分量の絶対値の和として表され直角距離とよばれる。これは、都市部などを想定していただくと、建築物が密集しており、2地点の移動には直線で移動するとどこかの建物にぶつかることになり、現実的な移動としては道路網が格子状に配備されているので、その道路に沿って移動することになる。直角距離は救急車のような車での移動を想定しており、直線距離はヘリコプターのような空路を使った移動を想定している。すなわち比較的狭い範囲を扱う直角距離と広い範囲の直線距離があることになる。

本研究で考える事故発生現場は多角形領域内の任意の点で、当然連続体濃度の点であるが、ミニマックス型の問題として考えると、有限個の点に限定して考えればよいことがわかる。その性質を使えば、本論文で考える問題はメッセンジャーボーイの問題([1], [2], [5])に帰着されることが示される。メッセンジャーボーイの問題はすでに効率的な解法が示されており、特に直角距離では簡単な計算で厳密解が得られているので、それらの解法を利用すればよい。

次のセクションでは本論文で考える問題を詳細に解説し定式化を行う。この部分は直線距離と直角距離では共通なものである。セクション3では、直線距離の場合に無数に存在した事故発生点が有限個の点に制限されることを示し、本研究の問題がメッセンジャーボーイの問題に帰着されることを示す。セクション4では、具体的にそれら制限された有限個の点を求める方法を示し、それらを与えるアルゴリズムを与える。次にセクション5では、直角距離で考えたときにも有限個の点に制限されることを示し、セクション6で有限個の点を与えるアルゴリズムを与える。

2. モデル定式化

平面上のある多角形領域 R を考える。この領域としては救急基地を配置すべき行政区域とする。この領域内に複数個の収容施設があり、領域内で事故が発生したときにより早

く収容させるための救急車の基地を配置する問題を考える。このとき、事故発生連絡を受け救急車が基地を発って事故現場で患者を乗せ収容施設に収容するまでの距離（ここでは収容時間という）が重要であり、この収容時間が長いと助かる患者も助からなくなる。そこで基準として最長の収容時間を最小にすることを考える。通常の緊急施設を配置する問題は、施設と需要点までの距離を考え、その最大値を最小にするように施設を配置するのである。この問題はミニマックス型配置問題とよばれる。本論文では、このミニマックス型配置問題で基地から需要点までの距離の代わりに、基地から需要点を経由して収容施設までのルート長さを使ってモデル化する。これは例えば、事故発生における救急車のように、基地から事故現場までを対象にしたのでは不十分で、実際に収容施設に収容するまでのルート長さを考えることがモデルとして妥当であると思われる。それゆえ、問題は次のように表される。

【問題 1】

$$\min_X \max_{A \in R} D(X, A) = \{d(X, A) + \min_{1 \leq j \leq m} d(A, S_j)\}$$

ここで、

- X : 配置する救急基地の位置 ($X = (x, y)$)
- A : 配事故発生現場 ($A = (a, b)$)
- S_j : 配収容施設 ($S_j = (s_j, t_j)$), ($j = 1, 2, \dots, m$)
- $d(X, A)$: 配 2 点 X, A 間の距離

である。本論文ではこの問題を直線距離（ユークリッド距離）の場合と直角距離の場合に分けて考える。 L_p ノルムを考えればより一般的ではあるが⁸、実際は L_2 ノルムである直線距離と L_1 ノルムである直角距離あたりが現実モデルに該当すると思われる。通常よく用いられる距離といえば 2 点間をまっすぐに繋いだ経路である直線距離を考えるのであるが、例えば都市部のようなところでは建物が密集しており道路が格子状になっていることが多いので、2 点間の移動は直線的に移動することはできず、例えば水平方向と垂直方向の和として表されることが考えられる。

3. 直線距離のモデル

直線距離では 2 点 X と A の距離は

$$d(X, A) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

である。このとき次の補題が成り立つ。

〔補題1〕

収容施設 S_j が支配する領域上ではボロノイ辺または多角形領域 R の境界上に $D(X, A)$ を最大にする点が存在する。

〔証明〕

収容施設 S_j が支配する領域の内部にある任意の点 A に対して

$$D(X, A) = d(X, A) + d(A, S_j)$$

である。いま、 S_j から点 A を通って境界と交わる点を B とする。このとき三角不等式より

$$d(X, A) \leq d(X, B) + d(A, B)$$

であるから

$$D(X, A) = d(X, A) + d(A, S_j) \leq d(X, B) + d(B, S_j) = D(X, B)$$

が成り立つ。すなわち、 $D(X, A)$ を最大にする点はボロノイ辺または多角形領域の境界上に存在する。(証明終り)

また、次の補題も成り立つ。

〔補題2〕

収容施設 S_j が支配する領域内または境界の線分上で $D(X, A)$ を最大にする点は、この線分の両端のいずれかである。

〔証明〕

収容施設 S_j が支配する領域内または境界にある線分上の任意の点では、

$$D(X, A) = d(X, A) + d(A, S_j)$$

と表されるので、2点 X, S_j を焦点とする楕円を考えることにより、この2焦点からの距離の和が最大になる点は線分においては端点である。(証明終り)

これらの補題から次の定理が成り立つ。

〔定理1〕

問題1の需要点(事故発生点)は次の点に制限される。

- (1) 多角形領域 R 内の収容施設を母点とするボロノイ点
- (2) 多角形領域 R の頂点
- (3) 多角形領域 R の境界線と収容施設を母点とするボロノイ辺との交点

〔証明〕

補題1より明らかにボロノイ点は候補になる。また、各母点が支配する領域内において

も多角形領域 R の境界で端点となるものも候補になると考えられる。(証明終り)

定理 1 から、問題 1 の最適解の候補が有限個の点 $A_1, A_2, \dots, A_n$ に制限されることがわかる。いま事故の発生点 $A_i = (a_i, b_i)$ の位置が決まれば、そこから最も近い収容施設は事前に決まっているのであるから、 A_i から最も近い収容施設の位置を $S(A_i)$ とすると、事故発生点 A_i から収容施設までの距離は $d(A_i, S(A_i)) = h_i$ となり問題 1 は次のように表される。

[問題 2]

$$\min_X \max_{1 \leq i \leq n} \{\sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2} + h_i\}$$

この問題は良く知られたメッセンジャーボーイ問題であり、その解法を利用した解法を提案する。

4. 直線距離を用いたモデルの解法

このセクションでは問題 2 の解法としてメッセンジャーボーイ問題の解法 ([1]) を利用して解くことを考える。問題 1 では需要点 (事故発生点) は多角形領域 R すべてが対象であったが、定理 1 の結果より問題 2 では有限個の需要点に候補が限られることがわかった。定理 1 の (1) に該当する候補点 (ボロノイ点) は少なくとも 3 つの収容施設 $S_i = (s_i, t_i)$, $S_j = (s_j, t_j)$, $S_k = (s_k, t_k)$ から等距離の点ということになる。すなわち

$$(x-s_i)^2 + (y-t_i)^2 = (x-s_j)^2 + (y-t_j)^2 = (x-s_k)^2 + (y-t_k)^2$$

を満足する (x, y) が問題 2 の制限される需要点の候補点になる可能性がある。この点を (x_{ijk}, y_{ijk}) とすると

$$x_{ijk} = \frac{N_x}{D_x}, y_{ijk} = \frac{N_y}{D_y}$$

である。ここで

$$N_x = s_i^2(t_j - t_k) + s_j^2(t_k - t_i) + s_k^2(t_i - t_j) - (t_i - t_j)(t_j - t_k)(t_k - t_i)$$

$$D_x = 2\{s_i(t_j - t_k) + s_j(t_k - t_i) + s_k(t_i - t_j)\}$$

$$N_y = (s_i - s_j)t_k^2 + (s_j - s_k)t_i^2 + (s_k - s_i)t_j^2 - (s_i - s_j)(s_j - s_k)(s_k - s_i)$$

$$D_y = 2\{(s_i - s_j)t_k + (s_j - s_k)t_i + (s_k - s_i)t_j\}$$

であり、この点 (x_{ijk}, y_{ijk}) がボロノイ点であるためには、3 つの収容施設 $S_i = (s_i, t_i)$, $S_j = (s_j, t_j)$, $S_k = (s_k, t_k)$ を通る外接円の内部に他の収容施設が存在しなければ良い。

次に定理 1 の (3) の場合を考える。この場合は多角形領域 R の境界辺 $V_k V_{k+1}$ 上で、2

つの収容施設 S_i, S_j から等距離の点, すなわち2点の二等分線が交わる点がこの候補点になる。いま $V_k = (u_k, \nu_k)$ と表すと, 境界辺 $V_k V_{k+1}$ 上の任意の点は

$$(\alpha_\lambda, \beta_\lambda) = (\lambda u_k + (1-\lambda)u_{k+1}, \lambda \nu_k + (1-\lambda)\nu_{k+1}), \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

であり, 候補点は方程式

$$(\alpha_\lambda - s_i)^2 + (\beta_\lambda - t_i)^2 = (\alpha_\lambda - s_j)^2 + (\beta_\lambda - t_j)^2$$

を満たしているので λ について解くと

$$\lambda = \lambda_{ijk} = \frac{(s_i - s_j)(s_i + s_j - 2u_{k+1}) + (t_i - t_j)(t_i + t_j - 2\nu_{k+1})}{2(u_k - u_{k+1})(s_i - s_j) + 2(\nu_k - \nu_{k+1})(t_i - t_j)}$$

となり, $0 \leq \lambda_{ijk} \leq 1$ と $(\alpha_\lambda, \beta_\lambda)$ に最も近い収容施設が S_i, S_j であることが $(\alpha_\lambda, \beta_\lambda)$ が需要点 S_i, S_j の候補点になるための条件である。

そこで, 上に与えられた性質を使って需要点の候補点を与えるアルゴリズムを簡素に述べる。

[アルゴリズム1]

ステップ1: 任意の3点 S_i, S_j, S_k について (x_{ijk}, y_{ijk}) を計算する。

ステップ2: もし i, j, k 以外の q について

$$(x - s_q)^2 + (y - t_q)^2 < (x - s_i)^2 + (y - t_i)^2$$

となる q が存在すれば (x_{ijk}, y_{ijk}) を候補点から取り除く。

ステップ3: すべての多角形領域 R の境界辺 $V_k V_{k+1}$ 上で, 任意の2点 S_i, S_j について $\lambda = \lambda_{ijk}$ と $(\alpha_\lambda, \beta_\lambda)$ を計算する。

ステップ4: $\lambda < 0$ または $\lambda > 1$ ならば $(\alpha_\lambda, \beta_\lambda)$ を候補点から取り除く。また, i, j, k 以外の q について

$$(x - s_q)^2 + (y - t_q)^2 < (x - s_i)^2 + (y - t_i)^2$$

となる q が存在すれば $(\alpha_\lambda, \beta_\lambda)$ を候補点から取り除く。

このアルゴリズム1より求められる候補点および多角形領域 R の頂点を需要点としてメッセンジャーボーイの問題を解けばよい。

5. 直角距離のモデル

次に直角距離の場合を考える。直角距離では2点 X と A の間の距離は水平方向と垂直方向に分解され

$$d(X, A) = |x - a| + |y - b|$$

で定義される。この場合も直線距離を用いた場合と同様に次の補題が成り立つ。

[補題 3]

収容施設 S_j が支配する領域上ではボロノイ辺または多角形領域 R の境界上に $D(X, A)$ を最大にする点が存在する。

[証明]

X と S_j を対角とする x 軸方向と y 軸方向の辺からなる矩形領域上のすべての点 A_0 に対しては $D(X, A_0)$ は一定の値を取る。それ以外の点 $A_1 = (a_1, b_1)$ に対しては、この矩形領域から例えば x 軸方向に離れる方向に移動すればボロノイ辺または多角形領域 R の境界に達する。その点を $A_2 = (a_2, b_1)$ とすれば

$$D(X, A_2) = D(X, A_1) + |a_1 - a_2|$$

となるので、 A_1 は $D(X, A)$ を最大にしないことがわかる。(証明終り)

このモデルにおいてはさらに次の補題が成り立つ。

[補題 4]

平面上の 2 点 A_1, A_2 から線分 P_1P_2 上の点 P_λ への直角距離の和は線分の端点 P_1 または P_2 で最大値を取る。

[証明]

ここで考える距離の和は次のように表される。

$$d(A_1, P_\lambda) + d(A_2, P_\lambda) = |a_1 - p_\lambda| + |b_1 - q_\lambda| + |a_2 - p_\lambda| + |b_2 - q_\lambda|$$

ここで

$$p_\lambda = \lambda p_1 + (1 - \lambda)p_2, q_\lambda = \lambda q_1 + (1 - \lambda)q_2$$

であるから $d(A_1, P_\lambda) + d(A_2, P_\lambda)$ は λ に関する区分的凸関数であることがわかる。それゆえ、線分 P_1P_2 上においては端点で最大値を取る。(証明終り)

[定理 2]

問題 1 で考えなければならない需要点は次のように制限される。

- (1) 多角形領域 R の境界線の頂点
- (2) 多角形領域 R の境界線とボロノイ辺との交点

[証明]

補題 3 よりボロノイ辺または多角形領域の境界上に $D(X, A)$ を最大にする点があることがわかり、補題 4 および補題 3 の証明で示したように、 X と S_j を対角とする x 軸方向と y 軸方向の辺からなる矩形領域を除いた部分に最大を与える点があるので、必然的に周辺すなわち多角形領域 R の境界線上に最大値を与える点があることがわかる。(証明終)

り)

定理2より問題1の需要点の候補が直角距離の場合も有限個の点 $A_1, A_2, \dots, A_n$ に制限されることがわかる。いま事故発生点 $A_i = (a_i, b_i)$ の位置が決まれば、そこから最も近い収容施設は明らかに与えられるのであるから、 A_i から最も近い収容施設を $S(A_i)$ とすると、距離は $d(A_i, S(A_i)) = h_i$ となり問題1は次のように表される。

[問題3]

$$\min_X \max_{1 \leq i \leq n} \{x - a_i + |y - b_i| + h_i\}$$

この問題は良く知られたメッセンジャーボーイ問題であり、その解法を利用した解法を提案する。

6. 直角距離を用いたモデルの解法

直角距離におけるボロノイ辺は x 軸に平行な部分、 y 軸に平行な部分、 $y = x$ に平行な部分、 $y = -x$ に平行な部分の4種類から構成される。定理2の(2)に対しては収容施設 S_i, S_j のボロノイ辺と多角形領域の境界辺 $V_k V_{k+1}$ の交点 $P_\lambda = (x_\lambda, y_\lambda)$ に対して

$$|x_\lambda - s_i| + |y_\lambda - t_i| = |x_\lambda - s_j| + |y_\lambda - t_j|$$

$$x_\lambda = \lambda u_k + (1 - \lambda) u_{k+1}, y_\lambda = \lambda v_k + (1 - \lambda) v_{k+1}$$

ここで次の6通りの場合が考えられる。

$$(\text{場合1}) \quad x_\lambda - s_i + y_\lambda - t_i = x_\lambda - s_j + t_j - y_\lambda$$

この場合は

$$\lambda_{ijk} = \frac{s_i - s_j + t_i + t_j - 2v_{k+1}}{2(v_k - v_{k+1})}$$

である。

$$(\text{場合2}) \quad x_\lambda - s_i + y_\lambda - t_i = s_j - x_\lambda + y_\lambda - t_j$$

この場合は

$$\lambda_{ijk} = \frac{s_i + s_j + t_i - t_j - 2u_{k+1}}{2(u_k - u_{k+1})}$$

である。

$$(\text{場合3}) \quad x_\lambda - s_i + t_i - y_\lambda = x_\lambda - s_j + y_\lambda - t_j$$

この場合は

$$\lambda_{ijk} = \frac{s_j - s_i + t_i + t_j - 2v_{k+1}}{2(v_k - v_{k+1})}$$

である。

$$(\text{場合 4}) \quad s_i - x_\lambda + y_\lambda - t_i = x_\lambda - s_j + y_\lambda - t_j$$

この場合は

$$\lambda_{ijk} = \frac{s_i + s_j + t_j - t_i - 2u_{k+1}}{2(u_k - u_{k+1})}$$

である。

$$(\text{場合 5}) \quad x_\lambda - s_i + y_\lambda - t_i = s_j - x_\lambda + t_j - y_\lambda$$

この場合は

$$\lambda_{ijk} = \frac{s_i + s_j + t_i + t_j - 2(u_{k+1} + v_{k+1})}{2(u_k - u_{k+1} + v_k - v_{k+1})}$$

である。

$$(\text{場合 6}) \quad x_\lambda - s_i + t_i - y_\lambda = s_j - x_\lambda + y_\lambda - t_j$$

この場合は

$$\lambda_{ijk} = \frac{s_i + s_j - t_i - t_j - 2(u_{k+1} - v_{k+1})}{2(u_k - u_{k+1} - v_k + v_{k+1})}$$

である。

これらの場合について $0 \leq \lambda \leq 1$ かつ (x_λ, y_λ) により近い施設が S_i, S_j の他になければ需要点の候補になる。

この性質を用いてアルゴリズムを構成する。

[アルゴリズム 2]

ステップ 1 : 任意の 2 点 S_i, S_j に対し, 多角形領域 R の境界の辺 $V_k V_{k+1}$ に対して $\lambda = \lambda_{ijk}$

および (x_λ, y_λ) を計算する。

ステップ 2 : $\lambda_{ijk} < 0$ または $\lambda_{ijk} > 1$ なら対応する (x_λ, y_λ) を需要点の候補から取り除く。

ステップ 3 : $\lambda = \lambda_{ijk}$ に対し

$$|s_i - x_\lambda| + |t_i - y_\lambda| > |s_q - x_\lambda| + |t_q - y_\lambda|$$

となる q が存在すれば (x_λ, y_λ) を需要点の候補から取り除く。

ステップ 4 : 残った需要点の候補点 $A_1, A_2, \dots, A_m$ でメッセンジャーボーイ問題を解く。

7. お わ り に

緊急施設配置問題は, 従来需要点に対して施設との2点間の距離を使ってミニマックス型配置問題として多くの研究がなされてきた。また, A. W. Chan and D. W. Hearn ([3])

の研究以来、収容施設も考慮した周回距離を導入した問題が研究された。しかし、周回距離では収容施設からの帰りの経路まで含めることになり、距離としては患者を収容するまでの距離で十分ではないかと考え、本研究においては救急車が救急基地から出て患者を収容施設に収容するまでの距離が最も重要だと考え、この距離でもって問題を定式化した。事故発生点(需要点)は地域内のすべての点を考えたが、問題がミニマックス型であることにより、現実には有限個の点を考えれば良いことがわかった。そこで、問題を改めて有限個の点に限定して考えれば、この問題は有名なメッセンジャーボーイ問題に帰着されることがわかった。あとは、このメッセンジャーボーイ問題を利用した解法を示した。2点間の距離として直線距離と直角距離を考えた。直線距離は普通の距離として違和感はないと思われるが、直角距離も現実にはそれほど珍しいものではなく、都市部におけるような建物が多くあり、道路網が格子状になっている場合には非常にフィットするものであると思われる。

謝 辞

本研究は戸田博之先生と青沼龍雄先生の退職記念号に掲載するものとして執筆しました。戸田先生には私が本学に着任以来、研究分野は私とは異なるのですが非常に気に掛けていただき、私の本学に溶け込むための大きな力を与えていただいたと感じており感謝致しております。また、青沼先生とは私の学生時代の恩師や学会活動を通じて、かなり以前からお話させていただく機会もあり、これまで非常に多くのご指導を受けて参りました。大阪大学より本学に着任させていただいたのも青沼先生のおかげでありますし、着任以降も様々な場面でご指導を受けました。この場をお借りしまして厚く御礼申し上げます。

参 考 文 献

- [1] R. L. Francis and J. A. White, *Facility Layout and Location, An Analytical Approach*, Prentice-Hall (1974).
- [2] Z. Drezner and H. W. Hamacher (eds.), *Facility Location, Applications and Theory*, Springer (2001).
- [3] A. W. Chan and D. W. Hearn, "A Rectilinear Distance Round-Trip Location Problem", *Trans. Sci.*, Vol. 11 (1977), pp. 107-123.
- [4] T. Ichimori and T. Nishida, "Note on a Rectilinear Distance Round-Trip Location Problem", *Opns. Res.* Vol. 19 (1985), pp. 84-91.
- [5] J. Elzinga and D. W. Hearn, "Geometrical Solutions for Some Minimax Location Problem", *Trans. Sci.* Vol. 6 (1972), pp. 379-394.