分散戦略を考慮した競合施設配置問題

大　角　盛　広

概要: 本論文では、直線市場において2企業がそれぞれ施設を配置し顧客の獲得競争を行うという状況を、先手後手のある非協力ゼロ和ゲームとして定式化し最適解を求めた。決定変数として、施設の位置だけでなく、施設の規模も大小2種類から選択できるモデルを導入する。また、後手企業は小規模ならば2施設まで分散配置できるものとした。解が顧客の分布に依存する場合については、いくつかの具体的な分布について、代数解および数値解を求めた。

キーワード: 配置問題, 非協力ゲーム, Stackelberg 解

1　はじめに

競合施設配置問題は、直線上の市場での企業の競合を扱ったH.Hotelling[1] のモデル以来、それをネットワーク上や平面上に拡張したさまざまなバリエーションが考えられている [2]。これらは基本的に、顧客はなるべく近い施設を選んで利用する、という仮定に基づいている。すなわち、施設の側から見ると、他の施設よりも有利に顧客を取り込める勢力圏というものがあることになる。

勢力圏は平面上ではユークリッド距離を用いたボロノイ領域で定義されることが一般的で、それが現実の妥当な近似となっている例も多く挙げられている [3][4]。また、距離以外にも顧客を惹きつける要素を同時に考慮する場合には、勢力の到達距離に魅力を乗じるような乗法重み付きボロノイ領域 (以下、加重ボロノイ領域と呼ぶ) を考えることもできる。

本論文では、この加重ボロノイ領域を用いるが、その場合、シンプルなボロノイ領域にはあった領域の凸性がなくなるという扱いにくい性質が生じることになる。また、重みの線形の変化に対しても、勢力圏の変化は非線形となってしまう。さらに、獲得する顧客の量を得るため顧客の密度関数を積分する必要があるが、その際に非線形に変化した勢力圏で密度関数を積分するので、人為的な特殊な場合を除いては代数的に解くことができない式が出てきやすい。これらの様子は次節

以降で明らかになっていくが、1次元市場の単純なモデルでも、煩雑な場合分けと計算が必要になるということに注意を促しておく。

本論文では、施設の規模と位置によって顧客の選好が決まるという仮定のもとで、競合する2企業が直線状の市場に出店する場合の競合配置問題を考察する。以下、便宜上「規模」と表現することにするが、距離以外で顧客に対する勧誘力・魅力を持つ要素であれば、他のものでも良い。

まず、先手企業は、大小2種類の規模のうちどちらかの施設を任意の位置に配置できるものとする。建設コストは考慮しない。次に後手企業は、先手企業が出店した施設の規模と位置とを知ったうえで、大小どちらかの規模の施設を任意の位置に配置できるものとする。ただし、後手は、小さい規模の施設であれば2店まで配置できるものとする。すなわち、後手は、先手の戦略を知った上で、大きい施設を配置するか、小さい施設を1店出店するか2店出店するかを決定できるものとする。2店を出店する場合、互いに隣り合って協力する以外に、既存店を両側から挟み撃ちしてシェアを奪うという挟み撃ち戦略を採ることが可能になる。

先手後手とも、提携はせず、お互いに自己が獲得できる利得が最大になることだけを目的とする。また、先手企業は競合企業があとから参入してくるということを知っているものとする。すなわち、先手企業は、最初に出店する際に、後手企業が参入することを考慮に入れた上で、最終的な自分の利得が最大になるように施設の規模と配置を決めねばならない。

第2節ではこの問題の定式化を行い、第3節ではいくつかの分布について代数解または数値解を求めるとともに若干の補足的な考察を加える。最後に第4節で今後の展望を述べる。

2　競合施設配置モデル

2.1　市場と顧客の選好

市場と顧客の選好に関して以下のように仮定する。

- 線分 $[0,1]$ 市場に、顧客が密度関数 $f(x)$ で分布する
- 顧客は必ずいずれか1つの施設を利用する
- 顧客は施設までの距離と施設の規模に応じて利用する施設を選択する。ただし、等距離かつ等規模の場合は均等利用する

施設側から見ると、位置と規模によって顧客を獲得できる勢力圏が決まることになる。この勢力圏として加重ボロノイ領域を使う。加重ボロノイ領域 V_i は、重み w_i, w_j を伴う点 p_i, p_j について、次のように定義される。

$$V_i = \bigcap_{j:j\neq i} \left\{ x \;\middle|\; \frac{1}{w_j} d(p_j, x) > \frac{1}{w_i} d(p_i, x) \right\}$$

ただし、$d(p_i, x)$ は p_i と x 間のユークリッド距離を表す。

2 次元の場合は、V_i の境界は重みの小さい点のまわりを囲むアポロニウスの円または円の一部となる。すなわち、重みの大きい点の側から見ると、自己の勢力圏の中に円形または複数の円が重なった形の非勢力圏がいくつか存在するという状態になる。

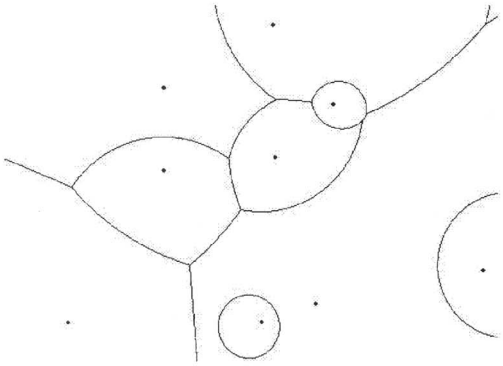

図 1: 9 つの施設による加重ボロノイ領域の例

そのため、最も重みの小さい点以外では勢力圏に凸性がなくなり、特に 1 次元では勢力圏が複数の領域に分断されることになる。これが勢力圏に関して煩雑な場合分けを必要とする原因となる。

なお、以下では、簡単のため、勢力圏におさめた顧客の量とそこから得る利得とを等しい (係数 1 で比例する) と考えることにする。

2.2　配置戦略

先手後手がそれぞれ大小 2 種類から選んで 1 つまたは 2 つの施設を置くものとする。

大きい規模をL、小さい規模をSで表すと、先手の戦略は{Sを1つ置く, Lを1つ置く}の2通り、後手の戦略は{Sを1つ置く, Sを2つ置く、Lを1つ置く}の3通りで、それぞれについて位置を決定することまで含まれる。S,Lの位置をそれぞれs, ℓで表し、規模と位置の戦略を$T_1 = \{\{s\}, \{\ell\}\}$, $T_2 = \{\{s\}, \{s_1, s_2\}, \{\ell\}\}$で表す。

先手が純戦略$t_1 \in T_1$を採ったとき、後手が純戦略$t_2 \in T_2$で得られる利得を$g_1(t_2 \,|\, t_1)$で表し、同じく後手の利得を$g_2(t_2 \,|\, t_1) = 1 - g_1(t_2 \,|\, t_1)$で表す。このとき、

$$g_2(t_2^* \,|\, t_1) \geq g_2(t_2 \,|\, t_1) \ \text{ for all } \ t_2 \in T_2$$

を満たす$t_2^*(t_1)$を、先手の戦略t_1に対する後手の最適反応戦略という。最適反応戦略を採ったときのg_2の値を$g_2^*(t_1)$で表す。また、次の不等式

$$g_1(t_2^*(t_1^*) \,|\, t_1^*) \geq g_1(t_2^*(t_1) \,|\, t_1) \ \text{ for all } t_1 \in T_1$$

を満たすt_1^*は、後手が利己的に最適配置を行うことを考慮に入れたうえでの先手の最適戦略である。すべての顧客は必ず唯一の施設を利用するので、これはゼロサムゲームである。ゆえにt_1^*を求めることは次の最小化問題を解くことと等しい。

$$\min_{t_1} g_2(t_2^*(t_1) \,|\, t_1)$$

先手のこの解t_1^*のことをStackelberg解といい、これを採ったときのg_1の値をg_1^*で表す。本論文のように先手後手のある非協力ゲームでプレーヤーが純戦略をとる場合には、Stackelberg解が存在することが知られている。後手がいかなる戦略を採ろうとも、先手がt_1^*を採る限りg_1^*が保証されることになるので、g_1^*は先手の利得の最大の下界を与えることになる。

3　最適反応戦略とStackelberg解

本節以下で、先手がL規模を1つ置き、後手がS規模を2つ置くようなパターンをL/SSと表記することにする。S/S,S/SS,S/L,L/Lの4パターンについては、先手後手とも顧客分布に依存しない最適配置が求められるので、まず最初にこれらのパターンについて述べ、その後に分布に依存するパターンについて具体的な分布を例に取り解を求める。

なお、点xの左側からと右側からの「隣接点」を以下のように定義しておく。

$$x^- = \lim_{\epsilon \to -0} x + \epsilon \ , \ \ x^+ = \lim_{\epsilon \to +0} x + \epsilon$$

3.1　分布に依存せず解が求められる場合

3.1.1　S/S の場合

先手 S の座標を s_1、後手 S の座標を s とすると、後手の利得 g_2 は

$$g_2(\{s\}\,|\,\{s_1\}) = \begin{cases} \int_0^{\frac{s_1+s}{2}} f(x)\,dx\,, & s < s_1 \\ \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,dx\,, & s = s_1 \\ \int_{\frac{s_1+s}{2}}^1 f(x)\,dx\,, & s > s_1 \end{cases}$$

となり、それぞれの区間で s に関して単調増加、一定、単調減少である。一般に $\int_0^{s_1} f(x)\,dx \neq \int_{s_1}^1 f(x)\,dx$ であるから、g_2 は s に関して s_1 において不連続である。

$f(x)$ の不定積分を $F(x)$ とすると、各区間での最大利得は次のように与えられる。

$$\begin{cases} F\left(\frac{s_1+s}{2}\right) - F(0)\,, & s = s_1^- \\ \frac{1}{2}\,, & s = s_1 \\ F(1) - F\left(\frac{s_1+s}{2}\right)\,, & s = s_1^+ \end{cases}$$

これらのうちの最大値を最小にする先手の位置は、$(F(\frac{s_1+s_1^-}{2}) - F(0)) + (F(1) - F(\frac{s_1+s_1^+}{2})) = 1$ であることから、両者を等しくする点、すなわち $F(\frac{s_1+s_1^-}{2}) - F(0) = F(1) - F(\frac{s_1+s_1^+}{2}) = \frac{1}{2}$ を満たす点で、これは median 点である。よって以下の解が得られる。

$$\begin{cases} \begin{cases} \int_0^{s_1} f(x)dx \geq \int_{s_1}^1 f(x)dx \quad \text{ならば} & s^*(s_1) = s_1^-\,, \quad g_2^* = \int_0^{s_1} f(x)dx \\ \qquad\text{さもなければ} & s^*(s_1) = s_1^+\,, \quad g_2^* = \int_{s_1}^1 f(x)dx \end{cases} \\ s_1^* = \text{median 点}\,,\ g_1^* = \frac{1}{2} \end{cases}$$

3.1.2　S/SS の場合

先手の位置を s、後手の位置を s_1, s_2 とする。いずれの施設も他の施設の位置を越えて勢力圏を獲得することができないため、後手は先手 S の両側に S,S を隣接させることで、先手 S の勢力圏の長さを 0 にできる。すなわち、先手 S はどこに置いても利得は 0 となる。よって以下の解が得られる。

$$\begin{cases} \{s_1^*(s), s_2^*(s)\} = \{s^-, s^+\} \text{ または } \{s_1^*(s), s_2^*(s)\} = \{s^+, s^-\}\,,\ g_2^* = 1 \\ s^* \in [\,0, 1\,]\,,\ g_1^* = 0 \end{cases}$$

3.1.3　S/L の場合

先手の座標を s、後手の座標を ℓ とすると、後手の利得 g_2 は

$$g_2(\{\ell\}\,|\,\{s\}) = \begin{cases} \int_0^{\frac{S}{L+S}\ell+\frac{L}{L+S}s} f(x)\,dx\,, & 0 \le \ell < 1-\frac{L}{S}(1-s) \\ & \text{かつ } 1-\frac{S}{L} < s \\ \int_0^{\frac{S}{L+S}\ell+\frac{L}{L+S}s} f(x)\,dx + \int_{-\frac{S}{L-S}\ell+\frac{L}{L-S}s}^1 f(x)\,dx\,, & 1-\frac{L}{S}(1-s) \le \ell < s \\ & \text{または } \ell < s < 1-\frac{S}{L} \\ \int_0^1 f(x)\,dx\,, & \ell = s \\ \int_0^{-\frac{S}{L-S}\ell+\frac{L}{L-S}s} f(x)\,dx + \int_{\frac{S}{L+S}\ell+\frac{L}{L+S}s}^1 f(x)\,dx\,, & s < \ell \le \frac{L}{S}s \\ & \text{または } \frac{S}{L} < s < \ell \\ \int_{\frac{S}{L+S}\ell+\frac{L}{L+S}s}^1 f(x)\,dx\,, & \frac{L}{S}s < \ell \le 1 \\ & \text{かつ } s < \frac{S}{L} \end{cases}$$

となり、この5つの区間で順に、ℓ に関して単調増加、単調増加、定数、単調減少、単調減少である。また、g_2 は ℓ に関して連続関数となっているので、ただちに以下の解が得られる。

$$\begin{cases} \ell^* = s^- \text{ または } s \text{ または } s^+\,,\ g_2^* = 1 \\ s^* \in [\,0,1\,]\,,\ g_1^* = 0 \end{cases}$$

3.1.4　L/L の場合

先手の位置を ℓ_1、後手の位置を ℓ とすると、S/S の場合と同様に解ける。

$$\begin{cases} \begin{cases} \int_0^{\ell_1} f(x)dx \ge \int_{\ell_1}^1 f(x)dx & \text{ならば} \quad \ell^*(\ell_1) = \ell_1^-\,,\quad g_2^* = \int_0^{\ell_1} f(x)dx \\ \text{さもなければ} & \ell^*(\ell_1) = \ell_1^+\,,\quad g_2^* = \int_{\ell_1}^1 f(x)dx \end{cases} \\ \ell_1^* = \text{median 点}\,,\ g_1^* = \frac{1}{2} \end{cases}$$

3.2　分布によって解が異なる場合

これまでに述べたパターンでは、顧客の分布に依存せずに最適解が求められる。しかし、それ以外のパターンでは解が分布に依存して決まるため、

- 一様分布

- 区分的に線形な単峰分布
- 正規分布

の3つの分布について解を求めることにする。区分的に線形な単峰分布は、位置 c に峰がある次のような密度関数で表されるものとし、左右非対称な市場のモデルとなる。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{c}\,x\,, & 0 \le x \le c \\ \frac{2}{1-c}(1-x)\,, & c < x \le 1 \end{cases}$$

正規分布では、数値積分で得られる近似解をもって解とする。その際、他の場合に合わせて $[0,1]$ 市場に限定するため、少なくとも 99.74%のデータが $[0,1]$ 上にあるように、正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ において $[\mu-3\,\sigma,\mu+3\,\sigma] \subseteq [0,1]$ となる μ,σ を用いるものとする。この区間で積分しても1には満たないので厳密には分布ではないが、ここでは近似解を求めることが目的であるので特に問題を生じない。

3.2.1　L/S の場合

S/L と L/S は非対称であるから、別に考えねばならない。先手 L の座標を ℓ、後手 S の座標を s とすると、後手の利得 g_2 は次のように表される。

$$g_2(\{s\}\,|\,\{\ell\}) = \begin{cases} \int_0^{\frac{S}{L+S}\ell+\frac{L}{L+S}s} f(x)\,dx\,, & 0 \le s < \frac{S}{L}\ell \\ \int_{-\frac{S}{L-S}\ell+\frac{L}{L-S}s}^{\frac{S}{L+S}\ell+\frac{L}{L+S}s} f(x)\,dx\,, & \frac{S}{L}\ell \le s < \ell \\ 0\,, & s = \ell \\ \int_{\frac{S}{L+S}\ell+\frac{L}{L+S}s}^{-\frac{S}{L-S}\ell+\frac{L}{L-S}s} f(x)\,dx\,, & \ell < s \le 1-\frac{S}{L}(1-\ell) \\ \int_{\frac{S}{L+S}\ell+\frac{L}{L+S}s}^{1} f(x)\,dx\,, & 1-\frac{S}{L}(1-\ell) < s \le 1 \end{cases}$$

g_2 は s に関して連続関数で、最初の区間は s に関して単調増加、最後の区間は s に関して単調減少である。しかし単調性がない区間があるため、S/L の場合のように分布に依らず明らかに最大値を与える点はない。

一様分布の場合のL/S

g_2 で単調性が保証されなかった区間が以下のようになる。

$$\begin{cases} \frac{S}{L}\ell \leq s < \ell & \cdots \text{単調減少} \\ \ell < s \leq 1 - \frac{S}{L}(1-\ell) & \cdots \text{単調増加} \end{cases}$$

従って、これらの区間の境界、勢力圏が減り始めない範囲においてSがLから最大限離れた点で g_2 が最大値を取る。すなわち、

$$\begin{cases} \ell < \frac{1}{2}\text{のとき} \quad s^*(\ell) = 1 - \frac{S}{L}(1-\ell)\ , & g_2^* = \frac{2S}{L+S}(1-\ell) \\ \ell \geq \frac{1}{2}\text{のとき} \quad s^*(\ell) = \frac{S}{L}\ell\ , & g_2^* = \frac{2S}{L+S}\ell \end{cases}$$

このとき g_2 を最小にする先手のStackelberg解と利得は

$$\ell^* = \frac{1}{2}\ , g_1^* = \frac{L}{L+S}$$

となる。

線形単峰分布の場合のL/S

一般性を失わず $c \leq \frac{1}{2}, c \leq \ell$ の場合のみを考察する。後手Sの勢力圏が $0, c$ を含むか否かで以下のような区間で場合分けを行う (図2参照)。

1. $0 \leq s < \frac{S}{L}\ell$ のとき、g_2 は s に関して単調増加する。

2. $\frac{S}{L}\ell \leq s < \ell\ ,\ \frac{S}{L+S}\ell + \frac{L}{L+S}s \leq c$ のとき、$g_2 = \frac{4LS(\ell-s)(L^2s-S^2\ell)}{c(L-S)^2(L+S)^2}$ となり、$s^{2*} = \frac{L^2+S^2}{2L^2}\ell$ で最大値 $g_2^{2*} = \frac{S\ell^2}{Lc}$ をとる。

3. $\frac{S}{L}\ell \leq s < \ell\ ,\ -\frac{S}{L-S}\ell + \frac{L}{L-S}s < c < \frac{S}{L+S}\ell + \frac{L}{L+S}s$ のとき、
$g_2 = \frac{2c(L^4s+L^3S(s-\ell)(2s-1)-L^2S^2(\ell+s)+LS^3(\ell-s)(2\ell-1)+S^4\ell)-(L+S)^2(Ls-S\ell)^2-c^2(L^2-S^2)^2}{c(1-c)(L-S)^2(L+S)^2}$
となり、$s^{3*} = \frac{S(L+S)^2\ell+c(L^3-LS^2+(1-2\ell)S^3-L^2S(1+2\ell))}{L(L^2+(2-4c)LS+S^2)}$ で
最大値 $g_2^{3*} = \frac{4S((L+S)\ell-Lc-S\ell^2)}{L^2+(2-4c)LS+S^2}$ をとる。

4. $\frac{S}{L}\ell \leq s < \ell\ ,\ c \leq -\frac{S}{L-S}\ell + \frac{L}{L-S}s$ のとき、g_2 は s に関して単調減少する。

5. $\ell \leq s$ のとき、$g_2 = \frac{4LS(s-\ell)(S^2(1-\ell)-L^2(1-s))}{(1-c)(L-S)^2(L+S)^2}$ となり、$s^{5*} = \frac{(1+\ell)L^2-(1-\ell)S^2}{2L^2}$ で最大値 $g_2^{5*} = \frac{S(1-\ell)^2}{L(1-c)}$ をとる。

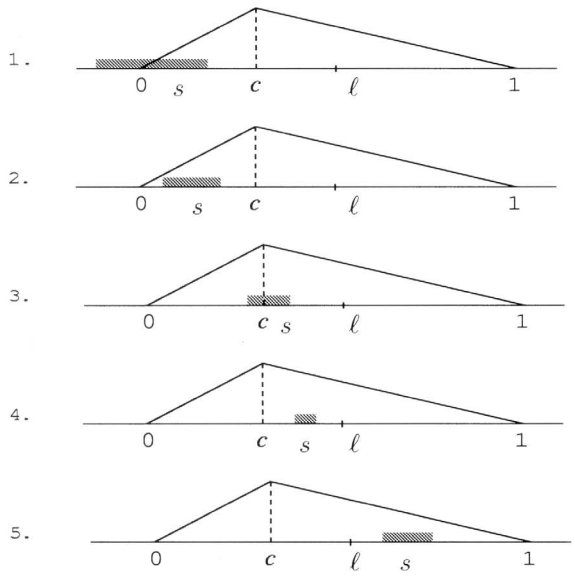

図 2: L/S における S の勢力圏 (網掛け) の位置による場合分け

g_2 は s に関して連続関数で、$g_2^{2*}, g_2^{3*}, g_2^{5*}$ の中で最大値を与える点が後手の最適反応戦略である。まず区間 2 と 3 を比較する。$\ell < \frac{2L}{L+S}c$ ならば $g_2^{2*} > g_2^{3*}$ であるが、$c < \frac{2L}{L+S}c$ であるから $c \leq \ell$ の下ではこれは成り立たない。よってつねに $g_2^{3*} \geq g_2^{2*}$。次に区間 3 と 5 を比較すると、

$$\ell \leq \frac{(3-2c)L^2+S^2+2L((2-3c)S-(1-c)\sqrt{2L^2+(4-8c)LS+2S^2})}{L^2+2(3-4c)LS+S^2} \quad \cdots \text{ 条件 A}$$

ならば $g_2^{5*} \geq g_2^{3*}$、さもなければ $g_2^{5*} < g_2^{3*}$。従って、以下の解が得られる。

$$\begin{cases} \ell \text{ が条件 A を満たすとき} & s^*(\ell) = s^{5*}(\ell)\,,\ g_2^*(\ell) = g_2^{5*}(\ell) \\ \ell \text{ が条件 A を満たさないとき} & s^*(\ell) = s^{3*}(\ell)\,,\ g_2^*(\ell) = g_2^{3*}(\ell) \end{cases}$$

$g_2^{3*}(\ell)$ は ℓ に関して上に凸で $\ell = \frac{L+S}{2S}\ (>1)$ が頂点。よって、$c \leq \ell \leq 1$ のとき ℓ に関して単調増加するから、$\ell = c$ で最小値 $\frac{4S^2(1-c)c}{L^2+(2-4c)LS+S^2}$ をとる。$g_2^{5*}(\ell)$ は ℓ に関して単調減少し、$\ell = 1$ で最小値 0 をとる。g_2^* を最小にするのは ℓ が条件 A の等号を満たすときであるから、

$$\begin{cases} \ell^* = \frac{(3-2c)L^2+S^2+2L((2-3c)S-(1-c)\sqrt{2L^2+(4-8c)LS+2S^2})}{L^2+2(3-4c)LS+S^2} \\ g_1^* = 1 - \frac{4(1-c)LS(S-L+\sqrt{2L^2+(4-8c)LS+2S^2})^2}{(L^2+2(3-4c)LS+S^2)^2} \end{cases}$$

ℓ^* を c の関数とみなせば、ℓ^* は c に関して単調増加関数となっている。例として $\ell^*(0), \ell^*(0.4)$ を数値で求めると、以下のようになる。

$$\begin{cases} L \approx S \text{のとき} & \ell^*(0) \approx 0.2919\,, \quad \ell^*(0.4) \approx 0.4523 \\ L = 3\,S \text{のとき} & \ell^*(0) \approx 0.2164\,, \quad \ell^*(0.4) \approx 0.4653 \\ L \gg S \text{のとき} & \ell^*(0) \approx 0.1716\,, \quad \ell^*(0.4) \approx 0.5 \end{cases}$$

先手にとって、必ずしも c に置くことが最適配置ではなく、c が市場の端にある場合はLが小さいほど c から離れたところに最適解が現れる。c が比較的市場の中央に近い場合は、Lが大きいほど c よりもさらに中央に近いところに最適解が現れる。

正規分布の場合のL/S

線形単峰分布とは違い、正規分布は μ を中心に左右対称であるから、$[0,1]$ 区間内にほとんどすべての顧客が含まれるという条件の下では、μ を変えても解が平行移動するだけであまり意味がない。そこで以下では $\mu = 0.5$ に固定して考える。また、$\mu = 0.5$ で $[\mu - 3\,\sigma, \mu - 3\,\sigma] \subseteq [0,1]$ とするため $\sigma = \frac{1}{6}$ とする。

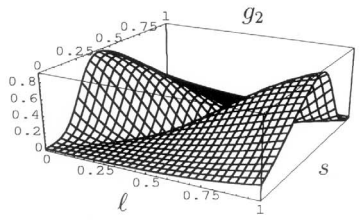

図 3: ℓ, s による g_2 の変化

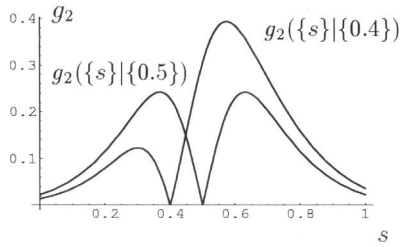

図 4: $\ell = 0.4$ および $\ell = 0.5$

$L = 2, S = 1$ として ℓ と s を少しずつ変えた場合の後手の利得 $g_2(\{s\}|\{\ell\})$ を計算した結果を図3に示す。図3の g_2 を $\ell = 0.4$ と $\ell = 0.5$ で切った断面図を図4に示す。正規分布が左右対称の分布であるので明らかに $\ell = \mu = 0.5$ のとき $\max g_2$ を最小化できる。よって、$\ell^* = \mu$ である。

次に、先手が $\ell^* = \mu$ のStackelberg解に配置した場合の、すなわち後手にとって最悪の場合の最適配置 s^* を求める。後手の勢力圏は s だけでなく L と S にも依存

するため、明らかに g_2^* は L, S にも依存する。$S = 1$ として $L \in (1, 10]$ で g_2^* の値と s^* とを計算したものを図5に示す。

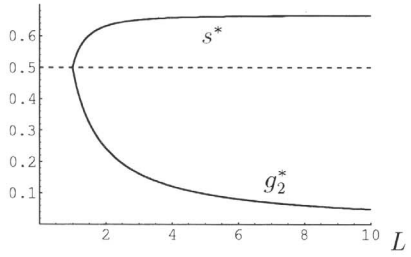

図 5: $\ell = 0.5$ の下での L に対する s^* と g_2^* の値

ただし、破線から上の部分は最適配置 s^* のグラフであり、破線から下の部分は最大利得 g_2^* のグラフである。それぞれ意味は異なるが、位置も利得も正規化されて0〜1の範囲内におさまっており、横軸が共通するため同じ場所に描いてある。また、分布が $\mu = 0.5$ を中心に左右対称であるから、$1 - s^*$ も最適配置であるが、図では s^* のみで代表させた。

考察: 図5より、$L > 3S$ になると、ほぼ $s^* \approx \mu + \sigma$ で安定しほとんど L の影響を受けなくなることがわかる。すなわち、正規分布市場では、強大な競合者が中央にいる場合には、そこから σ だけ離れておけば将来 L がさらに大きくなった場合も影響を最小限に抑えることができる、という解釈も成り立つと思われる。

3.2.2　L/SS の場合

L の座標を ℓ、後手の2つの S の座標を s_1, s_2 とする。一般性を失わず $s_1 \leq s_2$ とする。S は L を越えて勢力圏を獲得することはないので、L の片側に SS を配置する場合と L を挟んで左右に配置する場合とは分離して考えることができる。

一様分布の場合の L/SS

次の3パターンに場合分けして考える。一様分布なので勢力圏の長さが利得に直結する。S は L と同じ位置に置くと勢力圏が0になるため、同じ位置に置くことはありえない。

1. $s_1 < \ell < s_2$ のとき　(挟み撃ち戦略)
   S_1 の勢力圏は $s_1 = \frac{S}{L}\ell$ のとき最大で $[0, \frac{2S}{L+S}\ell]$、S_2 の勢力圏は $s_2 = 1-\frac{S}{L}(1-\ell)$ のとき最大で $[\frac{L-S}{L+S} + \frac{2S}{L+S}\ell, 1]$ で、その和 $\frac{2S}{L+S}$ は、先手の ℓ の位置に依らず一定である。

2. $s_1 \leq s_2 < \ell$ のとき　(片側戦略)
   S_1 の勢力圏は $s_1 = \frac{S}{L}\ell$ のとき最大で $[0, \frac{2S}{L+S}\ell]$。S_1,S_2 同士が勢力圏を奪い合っても利得和は増加しないため、勢力圏を接したところ、すなわち $s_2 = \frac{(3L-S)S}{L(L+S)}\ell$ のとき S_2 の勢力圏が $[\frac{2S}{L+S}\ell, \frac{4LS}{(L+S)^2}\ell]$ となり、併せて $[0, \frac{4LS}{(L+S)^2}\ell]$ を後手の勢力圏にできる。これが後手の最適反応戦略で、そのときの利得の係数は $\frac{4LS}{(L+S)^2} > 0$ であるから ℓ に関して単調増加である。

3. $\ell \leq s_1 \leq s_2$ のとき　(片側戦略)
   前項と同様にして、後手が最適反応戦略を採ったときの利得は、ℓ に関して単調減少であることが言える。

後手がLを挟む場合の最大利得 $\frac{2S}{L+S}$ とLの片側にかためる場合の最大利得 $\frac{4LS}{(L+S)^2}\ell$ を比較すると、$\frac{L+S}{2L} < \ell$ または $\ell < 1 - \frac{L+S}{2L}$ の範囲では片側戦略が有利である。以上をまとめると、次のようになる。

$$\begin{cases} 1 - \frac{L+S}{2L} \leq \ell \leq \frac{L+S}{2L} \text{のとき} & \{s_1^*, s_2^*\} = \{\frac{S}{L}\ell, 1 - \frac{S}{L}(1-\ell)\}, \quad g_2^* = \frac{2S}{L+S} \\ \text{上記以外} & \{s_1^*, s_2^*\} = \{\frac{S}{L}\ell, s_2^* = \frac{(3L-S)S}{L(L+S)}\ell\}, \quad g_2^* = \frac{4S}{(L+S)^2}\ell \end{cases}$$

ただし、片側にかためる解は、$\ell > \frac{L+S}{2L}$ の場合のみ ($s_1 \leq s_2 < \ell$ の場合) を記した。

先手は $1 - \frac{L+S}{2L} \leq \ell \leq \frac{L+S}{2L}$ で g_2 を最小値 $\frac{2S}{L+S}$ に抑えることができるので、Stackelberg 解は以下のようになる。

$$\ell^* \in [1 - \frac{L+S}{2L}, \frac{L+S}{2L}], \; g_1^* = \frac{L-S}{L+S}$$

考察:　先手Lに対して、後手がLを1つ置く方が有利か、分散させてSを2つ置く方が有利かを考察する。L/Lの場合とL/SSの場合で、後手の最悪の利得はそれぞれ $\frac{1}{2}$、$\frac{2S}{L+S}$ である。$\frac{2S}{L+S} > \frac{1}{2}$ となる条件は $S > \frac{1}{3}L$ であるから、$S > \frac{1}{3}L$ のときは後手は無条件にSSに分散する方が有利である (ただし、Lを挟むか片側にかためるかはLの位置に依存する)。

線形単峰分布の場合のL/SS

1. $s_1 < \ell < s_2$ のとき　(挟み撃ち戦略)
   Sの影響はLを越えては及ばないので、左右独立に考えればよい。L/Sと同様に場合分けする。ここでも一般性を失わず $c \leq \frac{1}{2}, c \leq \ell$ とする。

   a. $\frac{S}{L+S}\ell + \frac{L}{L+S}s_1 \leq c$ のとき、ℓ の左側のみで g_2 は $s_1 = \frac{L^2+S^2}{2L^2}\ell$ で最大値 $\frac{S\ell^2}{Lc}$。

   b. $-\frac{S}{L-S}\ell + \frac{L}{L-S}s_1 < c \leq \frac{S}{L+S}\ell + \frac{L}{L+S}s_1$ のとき、ℓ の左側のみで g_2 は $s_1 = \frac{S(L+S)^2\ell+(L^3-LS^2+(1-2\ell)S^3c-L^2(S+2S\ell))}{L(L^2+(2-4c)LS+S^2)}$ で最大値 $\frac{4S((L+S)\ell-Lc-S\ell^2)}{L^2+(2-4c)LS+S^2)}$。

   c. $c < -\frac{S}{L-S}\ell + \frac{L}{L-S}s_1$ のとき、ℓ の左側では g_2 は s_1 に関して単調減少する。

   d. $\ell < s_2$ のとき、ℓ の右側のみで g_2 は $s_2 = \frac{(1+\ell)L^2-(1-\ell)S^2}{2L^2}$ のとき最大値 $\frac{S(\ell-1)^2}{L(1-c)}$。

   a,b を比較すると $\frac{S\ell^2}{Lc} \leq \frac{4S((L+S)\ell-Lc-S\ell^2)}{L^2+(2-4c)LS+S^2}$ (等号は $\ell = \frac{2Lc}{L+S}$ のとき) で常にbが大。よってb+dが最適反応戦略で、後手は c を勢力圏に含む方が有利であることがわかる。整理すると、$s_1 < \ell < s_2$ のような挟み撃ち戦略のもとでの最適配置と利得は

$$\begin{cases} \{s_1^{d*}(\ell), s_2^{d*}(\ell)\} &= \{\frac{S(L+S)^2\ell+(L^3-LS^2+(1-2\ell)S^3c-L^2(S+2S\ell))}{L(L^2+(2-4c)LS+S^2)}, \frac{(1+\ell)L^2-(1-\ell)S^2}{2L^2}\} \\ g_2^{d*}(\ell) &= \frac{S((2c-1-\ell)L-(1-\ell)S)^2}{(1-c)L(L^2+(2-4c)LS+S^2)} \end{cases}$$

   と表せる。

2. $s_1 \leq s_2 < \ell$ または $\ell < s_1 \leq s_2$ のとき (片側戦略)
   SSの勢力圏が互いに接するとき g_2 が最大値をとるので、規模 $M = \frac{2L^2S}{L^2+S^2}$ を位置 $m = \frac{L(L+S)s_2-S(L-S)\ell}{L^2+S^2}$ に置くとみなせばL/Sの場合と同様に解ける。すなわち、L/Sの S と s を M と m に変えて、

$$\begin{cases} \ell \text{が条件Aを満たすとき} & m^*(\ell) = m^{5*}(\ell)\,,\ g_2^*(\ell) = g_2^{5*}(\ell) \\ \ell \text{が条件Aを満たさないとき} & m^*(\ell) = m^{3*}(\ell)\,,\ g_2^*(\ell) = g_2^{3*}(\ell) \end{cases}$$

   (m^* に対して $\{s_1^*, s_2^*\}$ は一意に定まるが、具体的な式は長大になるためここでは省略する)

ある ℓ に対して $g_2^{d*}(\ell), g_2^{3*}(\ell), g_2^{5*}(\ell)$ の中で最大になるものが後手の最適戦略である。例として $S = 1, L = 2, c = 0.3$ の場合を図6に示した。g_2^{d*} が挟み撃ち戦略

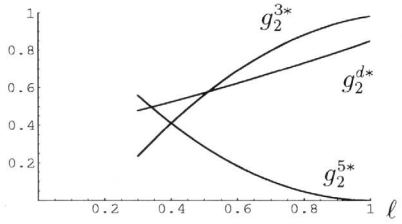

図 6: $S = 1, L = 2, c = 0.3$ での後手の戦略別の利得

の場合の利得である。S, L, c が変化するとこれらの曲線の位置関係が変化するが、これらの曲線の上側エンベロープが $g_2^*(\ell)$ となる。

$g_2^{3*}(\ell) = g_2^{5*}(\ell)$ を満たす ℓ を ℓ_{35}、$g_2^{3*}(\ell) = g_2^{d*}(\ell)$ を満たす ℓ を ℓ_{3d}、$g_2^{5*}(\ell) = g_2^{d*}(\ell)$ を満たす ℓ を ℓ_{5d} と名付けると、

$$\begin{cases} \ell_{5d} \leq \ell_{35}\text{の場合} \begin{cases} \ell < \ell_{5d}\text{のとき} & s^*(\ell) = s^{5*}(\ell), \quad g_2^*(\ell) = g_2^{5*}(\ell) \\ \ell_{5d} \leq \ell \leq \ell_{3d}\text{のとき} & s^*(\ell) = s^{d*}(\ell), \quad g_2^*(\ell) = g_2^{d*}(\ell) \\ \ell > \ell_{3d}\text{のとき} & s^*(\ell) = s^{3*}(\ell), \quad g_2^*(\ell) = g_2^{3*}(\ell) \end{cases} \\ \ell_{3d} \leq \ell_{35}\text{の場合} \begin{cases} \ell \leq \ell_{35}\text{のとき} & s^*(\ell) = s^{5*}(\ell), \quad g_2^*(\ell) = g_2^{5*}(\ell) \\ \ell > \ell_{35}\text{のとき} & s^*(\ell) = s^{3*}(\ell), \quad g_2^*(\ell) = g_2^{3*}(\ell) \end{cases} \end{cases}$$

$\ell_{3d} \leq \ell_{35}$ となる場合には、挟み撃ち戦略では利得を最大化できない。数値計算により曲線のふるまいを見ると、c が 0.5 に近く、かつ $L > 3\,S$ の場合は挟み撃ち戦略が有利にはならなくなる。

次に先手の Stackelberg 解を考える。$g_2^{3*}(\ell), g_2^{d*}(\ell)$ はともに増加関数であるから、g_2^* を最小にする ℓ は ℓ_{5d} または ℓ_{35} である。$g_2^{5*}(\ell)$ が減少関数なので、$\ell_{5d} < \ell_{35}$ ならば ℓ_{5d} が後手の利得を最小化する解になる。よって、以下のように Stackelbeg 解が求められる。

$$\begin{cases} \ell_{5d} < \ell_{35}\text{のとき} & \ell^* = \ell_{5d}, \quad g_1^*(\ell) = 1 - g_2^{5*}(\ell_{5d}) \\ \ell_{5d} \geq \ell_{35}\text{のとき} & \ell^* = \ell_{35}, \quad g_1^*(\ell) = 1 - g_2^{5*}(\ell_{35}) \end{cases}$$

正規分布の場合の L/SS

L/S の場合と同様 $\ell^* = \mu = 0.5$ として、後手が L の片側に SS を集める方が有利か L を挟み撃ちする方が有利かを考察する。

まず片側戦略を考える。L/S の場合と同様、$S=1$ として $L \in (1,10]$ で g_2^* の値と s^* とを計算したものを図 7 に示す。ただし、ここでは s^* は後手が SS を L の右側に集めて置いた場合の L に近い方の S の最適配置を表し、g_2^* はそのときの後手の利得である。なお、L/S の場合の最適配置と利得をそれぞれ $s^{*\prime}$ と $g_2^{*\prime}$ と表すことにする。比較のため図には $s^{*\prime}, g_2^{*\prime}$ も含めた。

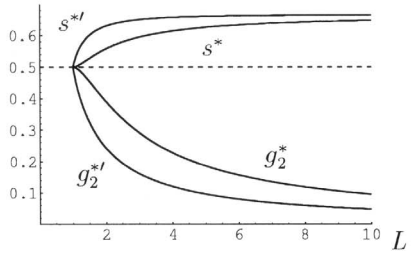

図 7: L/SS の片側戦略と L/S の場合での L に対する最適配置と利得

次に挟み撃ち戦略を考えると、S の勢力圏は L の位置を越えないため、明らかに L の両側において L/S で求めた最適戦略を採れば良いことになる。すなわち、解は

$$\{s_1^*, s_2^*\} = \{s^{*\prime}, 1-s^{*\prime}\}, \quad g_2^* = 2\,g_2^{*\prime}$$

となる。

数値計算により g_2^* と $2\,g_2^{*\prime}$ との比較を行うと、$L > S$ ならば L に依らず常に挟み撃ち戦略が有利であった。線形単峰分布の場合には、峰 c が市場の中央付近にあると $L > 3\,S$ で挟み撃ちが最適解となり得なくなったが、同じく峰が市場の中央にある正規分布の場合には、常に挟み撃ち戦略が有利という、異なった結果が得られた。

3.3　まとめ

S/S, S/SS, S/L, L/S のパターンでは分布に依らず以下のように解が定まる。

先手	Stackelberg 解	利得	後手	最適反応戦略	利得
S	median 点	$\frac{1}{2}$	S	隣接	$\frac{1}{2}$
S	-	0	SS	挟み撃ち	1
S	-	0	L	隣接	1
L	median 点	$\frac{1}{2}$	L	隣接	$\frac{1}{2}$

後手の最適反応戦略として、先手がStackelberg解を戦略としたときのものだけを表にしている。すなわち、後手にとっては最悪の場合の戦略と、最低限保証されている利得とが挙げられていることになる。

後手がSを2つまたはLを1つ置くことが予想される場合には、先手はSを1つ置いても無駄であり、最初から出店しないか、Lを1つ置く方が良い。本論文では考慮していないが、市場規模によっては後手があえてLやSSを置かないという仮定も自然である。

後手にとっては、先手がLを置かない場合、最悪でも$\frac{1}{2}$の利得が保証されることになる。

以上のパターンとは異なり、L/SやL/SSは最適解が分布に依存する。以下の表は一様分布のものである。

先手	Stackelberg解	利得	後手	最適反応戦略	利得
L	$\frac{1}{2}$	$\frac{L}{L+S}$	S	$\frac{S}{2L}$ または $1-\frac{S}{2L}$	$\frac{S}{L+S}$
L	$\ell \in [1-\frac{L+S}{2L}, \frac{L+S}{2L}]$	$\frac{L-S}{L+S}$	SS	$\frac{S}{2L}$, $1-\frac{S}{2L}$	$\frac{2S}{L+S}$

後手は$L > 3S$のときSSを置くよりもLを置く方が有利である。$L < 3S$のとき、先手はLを置いても$\frac{1}{2}$未満しか取れない。後手がSを1つ置くか2つ置くかの判断基準として、2つ目のSの設置費用が$\frac{2S}{L+S}(1-\ell)$未満なら2つ置く、ということも考えられよう。

線形単峰分布の場合は、表の形に簡潔にまとめるには式が長大すぎるため、再度まとめることは省略する。一般的に解くには煩雑な場合分けと複雑な計算をする必要があるものの、具体的な数値が確定すれば最適解を求めるのは容易である。単峰分布の場合、S, Lの差が少ないほど、また、峰の位置が市場の端の方にあればあるほど、挟み撃ち戦略が有利になることがわかった。また、後手がLまたはSSを設置コスト等を考慮せず置く場合、先手Lの片方の側にSSを置くよりはLを隣接させて置いた方が確実に$\frac{1}{2}$を取れるため、市場の半分が取れないようなSSの置き方は最適戦略にはなりえない。

正規分布$N(\mu, \sigma^2)$の場合には、$\mu = 0.5, \sigma = \frac{1}{6}$での計算結果から次のようにまとめられる。

先手	Stackelberg解	利得	後手	最適反応戦略	利得
L	μ	S, Lに依存	S	$L >> S$ならば$\mu \pm \sigma$	S, Lに依存
L	μ	S, Lに依存	SS	挟み撃ち	S, Lに依存

S, Lと利得との関係は図7で示した通りである。

4 おわりに

直線上の市場において、競合2企業が出店競争を行う場合をモデル化し、いくつかの分布において最適配置を求めた。その際、従来の研究では扱われていないタイプの、複数規模の施設の集中・分散戦略について考察した。

今後の課題としては、市場から得られる利得と出店コストとの兼ね合いを考慮したモデルで問題を考察したい。例えばL/Lの場合、明らかに両者にとってS/Sであっても同じ利得を得ることができ、出店コストまで考慮した場合にはL/Lは両者にとって損である。一方では、先手は後手を牽制して出店をあきらめさせるためにあえて最初にLを置くということも考えられよう。また、本論文では大小2種類の施設を仮定したが、施設の規模について連続的な変化を許す場合も考えたい。

第1節でも述べたように、加重ボロノイ領域には凸性がなくなるため、解を求める際にどうしても煩雑な場合分けが生じてしまう。しかし勧誘力や魅力を距離と組み合わせることについては、今のところ加重ボロノイ領域を考えるのが自然に思える。現実の特性を反映しつつ、さらに取り扱い易いモデルを考えることが今後の最大の課題である。

参考文献

[1] H.Hotelling, "Stability in Competition", The Economic Journal, Vol.30, pp. 41-57, 1929.

[2] Z.Drezner, H.W.Hamacher, "Facility Location: Applications and Theory", Springer Verlag, 2001

[3] A.Okabe, B.Boots and K.Sugihara, "Spatial tessellations - Concepts and applications of Voronoi diagrams", Wiley, Chichester, UK, 1992.

[4] 岡部篤行, 鈴木敦夫, "最適配置の数理 (シリーズ・現代人の数理3)", 朝倉書店, 1992.

[5] Z.Drezner, "Competitive Location Strategies for Two Facilities", Regional Science and Urban Economics, Vol.12, pp. 485-493, 1982.

[6] S.Osumi, S.Shiode, H.Ishii and Y.Teraoka, "A Competitive Facility Location Problem", Proceedings of The Third Conference of The Association of Asian-

Pacific Operational Research Societies (APORS), World Scientific , pp.251-257, 1995.

[7] S.Osumi, S.Shiode, H.Ishii and Y.Teraoka, "A Competitive Facility Location Problem with Establishing Cost", Mathematica Japonica Vol.48, No.1, pp.19-26, 1998.

[8] 大角, 塩出, 石井, 寺岡, 「施設の競合配置問題」, 生産管理, Vol.4, No.2, pp.153-160, 1997.

[9] 大角, 塩出, 「ファジィ限界距離を考慮した競合施設配置問題」, 日本経営システム学会二十周年記念論文誌, 東方出版, pp.265-283, 2001.

[10] S.Osumi and S.Shiode, "Competitive Facility Location Problem with Fuzzy Difference of Distance", Journal of Nonlinear and Convex Analysis, Volume 4, Number 1, Yokohama Publishers, pp.141-149, 2003.

[11] 大角, 「最適配置決定のアルゴリズムとシミュレーション・プログラムの実装」, 神戸学院経済学論, 第35巻, 第1,2号, pp.27-43, 2003.