周回途上で利用される施設の競合配置問題

大 角　盛 広

概 要

先手後手の区別のある2企業による平面上での競合施設配置問題を扱う。顧客は通勤通学などで自宅と特定の駅を周回しており，その行き帰りについでに施設を利用するものとする。顧客は近くて便利な位置にあると感じる場合だけ施設を利用し，遠いと感じればわざわざ出向かない。この状況を，寄り道距離の概念と，近さを表すメンバシップ関数を導入してモデル化した。先手後手の企業とも，お互いに自己が獲得できる利得を最大にすることだけを目的として，施設の配置を決定する。先手は後手が直後に参入してくることを考慮した上で，最終的な自分の利得が最大になるように配置を決定せねばならない。先手の最適配置を求める問題をCentroid問題，後手の最適配置を求める問題をMedianoid問題として定式化し，それぞれ最適解を探索する方法を提案した。

キーワード: 施設配置問題, 非協力ゲーム, 直角距離

1　はじめに

本論文では，平面上での2企業による競合施設配置問題を扱う。2企業による競合施設配置問題は，1929年にHotelling [1] によって定式化され，直線上の市場に施設を配置する場合のNash均衡問題が扱われた。その後，ネットワーク上の市場に先手後手の区別のある2企業が施設を配置する問題がHakimi [2] によって考えらた。Hakimiは先手後手の区別のある競合配置問題において，2つの問題を定式化した。すなわち，既存施設に対抗する後手企業の最適配置を求めるMedianoid問題と，あとから競合者が参入することを考慮に入れた上で先手の施設の最適配置を求めるCentroid問題である。

その後，場所・施設・顧客・距離などに関するさまざまな性質をモデル化した多様な問題が考察されてきた [6]。競合関係については，施設同士の競合だけではなく，施設の設置主体と住民との利害関係の競合を扱ったものも研究され始めている [9]。

これまで顧客の選好について最もよく用いられてきた仮定は，顧客は最も近い施設を1つだけを利用し，かつ，その施設が遠くても利用する，というものである。この

ようなモデルはゼロ和ゲームとなり，競合他者の顧客を減らすことが自己の顧客を増やすことに直結する。しかし，ファーストフード店，コンビニエンスストア，コーヒーチェーン店，レンタルビデオ店などのように，顧客は近くて便利な位置にある場合だけ施設を利用し，遠ければわざわざ出向かない，というタイプの施設もあり，本論文では，こうした性質をもつ施設の競合配置問題を考察する。

また，人によって距離感は異なるので，施設までの物理的な距離をそのまま用いるのではなく，近いと感じる度合いで施設を利用するか否かを決定すると仮定した。さらに，本論文では，寄り道距離という新しい距離の概念を導入した。都市部の多くの人は，通勤通学などで毎日のように自宅と特定の駅を周回する。そして，その駅への行き帰りに，ついでに上記の施設を利用する，という行動をとる。寄り道距離は，この周回行動をモデル化するものである。

本論文では先手後手の区別のある競合配置問題を扱うが，各企業は提携はせず，お互いに自己が獲得できる利得を最大にすることだけを目的として，施設の配置を決定する。ここで，先手企業は競合企業があとから参入してくるということを知っているものとする。すなわち，先手企業は，最初に施設を配置する際に，後手企業が参入してくることを考慮に入れた上で，最終的な自分の利得が最大になるように配置を決定せねばならない。遠いと感じる顧客が施設を利用しないという仮定のため，このモデルは非ゼロ和ゲームとなり，競合者の顧客を奪うことが必ずしも自己の顧客を増やすことにつながらない。換言すれば，先手に関して，後手と「潰し合い」にならないように，あえて後手が有利になるような場所を空けておくことで，結果的に先手が有利になるような場合が生じる。このような具体例については第4節で述べる。

2　モデルと定式化

2.1　需要点とプレーヤー

顧客の存在する需要点は平面上に離散的に分布し，施設は平面上の任意の位置に配置可能であるとする。需要点は，例えば集合住宅の位置を表し，需要点に付随する重みは，その住人すべての購買力の和を表す。各企業は自己の利得の最大化をめざして施設を配置するものとするが，ここでは，利得は獲得した購買力の合計で表されると単純化して考える。

顧客の行動について，以下のことを仮定する。

1. 顧客は最も近い周回点を利用する。
2. 顧客は最も近いと感じる施設だけを利用する。ただし，どの施設も近いと感じなければ施設を利用しない。

需要点，周回点，施設について，以下のような記号を用いる。

$A_i = (a_{i1}, a_{i2})$	需要点の位置 $(i = 1 \cdots n)$
W_i	需要点の重み (購買力)
$P_k = (p_{k1}, p_{k2})$	駅などの周回点の位置 $(k = 1 \cdots m)$
$X = (x_1, x_2)$	先手企業の位置
$Y = (y_1, y_2)$	後手企業の位置

2.2 距離と選好

本論文では，距離として，以下に示す直角距離を用いる。これは，Manhattan 距離とも呼ばれ，ニューヨークのマンハッタン地区や京都など，移動が碁盤目状の 2 方向に制限される地域における距離を表現するモデルとして知られている。一般に，都市部における徒歩や自転車等による距離は，Euclid 距離よりも直角距離の方が良好な近似となることが多い。

直角距離の定義：

平面上の 2 点 $P = (p_1, p_2), Q = (q_1, q_2)$ 間の直角距離 $d(P, Q)$ は以下のように定義される。

$$d(P, Q) = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2|$$

一点から等距離の点の集合を円とすると，直角距離における円は，視覚的には円形にならず，座標軸に対して斜め 45° に傾いた正方形になる。

周回距離の定義：

需要点 $A = (a_1, a_2)$ と，必ず通過して往復しなければならない周回点 $P = (p_1, p_2)$ が与えられたとき，A から施設 X までの周回距離 (round trip distance) rtd を以下のように定義する。

$$rtd(A, P, X) = 2(\max\{a_1, p_1, x_1\} - \min\{a_1, p_1, x_1\}) + 2(\max\{a_2, p_2, x_2\} - \min\{a_2, p_2, x_2\}$$

この定義は，A から出発して P と X を経由 A に戻るまでの距離を表している。P と X を経由する順序は問わない。

次に，ある周回点を利用する利用者の存在範囲を表すため，Voronoi 領域を定義する。

Voronoi 領域の定義：

周回点集合 $\{P_1, \cdots, P_m\}$ について，ある周回点 P_k の Voronoi 領域 $V(P_k)$ を以下のように定義する。

$$V(P_k) = \{Q = (q_1, q_2) \mid d(Q, P_i) < d(Q, P_j)\} \quad \text{for all} \quad j,\ j \neq i$$

A_i 上の顧客は，最も近い周回点を利用するから，$A_i \in V(P_k)$ を満たすような点 P_k を周回点とする。このような周回点を $P(A_i)$ で表す。すなわち，

$$P(A_i) = \{P_k \mid A_i \in V(P_k)\}$$

という関係が成り立つものとする。

ただし，この P の定義では，A_i が複数の周回点から等距離の位置にある場合，$P(A_i)$ が定まらない。そのような場合,「等距離にある複数の駅は確率的に均等に利用する」と仮定するモデルも成り立つ。しかし，実際には，定期券等の関係などから，利用する駅が決まっている，と仮定するモデルの方が妥当であろう。従って，ここでは，ある需要点から等距離に複数の周回点がある場合，確定的にいずれか１点の周回点の Voronoi 領域に含まれるものとして扱うことにする。すなわち，すべての需要点についていずれかの１つの周回点に対応付けるような関数 P があると仮定する。

寄り道距離の定義：

A_i から X までの周回距離は，$P(A_i)$ を用いて

$$rtd(A_i, P(A_i), X)$$

と表せるから，寄り道距離 (side trip distance) std を次のように定義する。

$$std(A_i, X) = rtd(A_i, P(A_i), X) - 2\,d(A_i, P(A_i))$$

すなわち，需要点 A_i の住人が最寄り駅を周回点とするとき，往路または復路で X に立ち寄るために余分に移動しなければならない距離が $std(A_i, X)$ である。X が A_i と $P(A_i)$ との最短経路上にある場合は，$std(A_i, X) = 0$ となる。

なお，$std(A_i, X)$ を一定にするような点 X の集合は，視覚的には八角形となる。これは２点 $A_i, P(A_i)$ からの距離の和が一定である集合と等しく，従って，この八角形は直角距離における楕円であると言える。

近さの定義：

A_i から $P(A_i)$ を往復するとき，往路または復路で X に立ち寄ることを「わずかなまわり道で，すぐ近くである」と感じる場合は，訪問に抵抗がないと考えられる。そこで，需要点 A_i から見た「近さ」の度合いを表す位置のファジィ集合を考え，その帰属度を以下のメンバシップ関数 $\tilde{N}_i$ で特性づける。

$$\mu_{\tilde{N}_i}(X) = \begin{cases} 1\,, & \frac{1}{2}std(A_i, X) \leq d_{i1} \\ 1 - \dfrac{\frac{1}{2}std(A_i, X) - d_{i1}}{d_{i2} - d_{i1}}, & d_{i1} < \frac{1}{2}std(A_i, X) < d_{i2} \\ 0\,, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$0 < d_{i1} < d_{i2}$ は，需要点ごとに定まる定数であり，寄り道の片道が d_{i1} 以内であれば $\mu_{\tilde{N}_i}(X) = 1$ で，これは寄り道に何の抵抗もなく十分近いと感じることを示す。片道が d_{i2} 以上の距離であれば $\mu_{\tilde{N}_i}(X) = 0$ で，これは近いとはまったく感じないことを表す。

A_i について，寄り道距離で「十分近い」領域を

$$D_{i1} = \{Q = (x, y) \mid \mu_{\tilde{N}_i}(Q) = 1\} = \{Q \mid \frac{1}{2}std(A_i, Q) \leq d_{i1}\}$$

で表し，その境界を

$$B_{i1} = \{Q = (x, y) \mid \frac{1}{2}std(A_i, Q) = d_{i1}\}$$

で表す。「わずかでも近い」領域 D_{i2} とその境界 B_{i2} についてもそれぞれ同様に定義するものとする。そして，その中間領域を $M_i = D_{i2} \setminus D_{i1}$ と表す。M_i は八角形の輪状の領域になる。

ここで，D_{i1} については，

$$P_k \neq P(A_i) \implies P_k \notin D_{i1}$$

が成り立っているものとする。すなわち，利用する周回点とは異なる周回点まで遠回りすることを「十分近い」と感じることはないものとする。

実際の距離 std をそのまま使わず，このような近さの基準を考える意義は

1. 体力等の差により，各人にとっての距離感は必ずしも物理的な距離と一致しない。
2. 自転車等の効率的な移動手段を持つ場合と持たない場合で，距離感と物理的な距離は一致しない

などによって，「近い」と感じる範囲 D_{i1} や D_{i2} が大きく異なる場合にも対応できる点にある。

選好：

競合施設がなく X のみが存在する場合，X は需要点 A_i の購買力 W_i のうち $\mu_{\tilde{N}_i}(X)\,W_i$ だけ獲得できるものとする。また，X,Y が配置されたとき，A_i はより近いと感じられる方だけを利用する。ただし，距離感に差がないときには両者を均等に利用するものとする。すなわち X,Y 配置後に X が A_i から獲得できる利得 g_{iX} を

$$g_{iX}(X,Y)=\begin{cases}\mu_{\tilde{N}_i}(X)\,W_i, & \mu_{\tilde{N}_i}(X)>\mu_{\tilde{N}_i}(Y)\\ \frac{1}{2}\mu_{\tilde{N}_i}(X)\,W_i, & \mu_{\tilde{N}_i}(X)=\mu_{\tilde{N}_i}(Y)\\ 0, & \mu_{\tilde{N}_i}(X)<\mu_{\tilde{N}_i}(Y)\end{cases}$$

で表すものとする。ここで，$\mu_{\tilde{N}_i}(X)=\mu_{\tilde{N}_i}(Y)=0$ のときには，どちらの施設もまったく利用されないので $g_{iX}(X,Y)=0$ である。

Y についても同様に g_{iY} を定義するものとする。また，X,Y がそれぞれ全需要点から獲得する利得を

$$G_X(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}g_{iX}(X,Y)\ ,\ \ G_Y(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}g_{iY}(X,Y)$$

で表すものとする。

2.3　定式化

X に対する Y の最適反応戦略 R_Y は次のように表される。

$$R_Y(X)=\{Y^*\,|\,G_Y(X,Y^*)=\max_{Y}G_Y(X,Y)\}$$

X に対抗して Y がただひとつの戦略を採用するとすれば，$S:X\mapsto Y$ の写像が得られ，次の最適反応戦略集合 D_Y が得られる。

$$D_Y=\{S=(X,Y)\,|\,X\in\mathcal{R}^2,\,Y\in R_Y(X)\}$$

ここで，X^* と Y^* が次の関係を満たすとき，Stackelberg 均衡にあるという。

$$G_X(X^*,Y^*)=\max_{S\in D_Y}G_X(X,Y)\ ,\ \ Y^*\in R_Y(X^*)$$

Y^* を求める問題が Medianoid 問題であり，X^* を求める問題が Centroid 問題である。一般に，Medianoid 問題よりも Centroid 問題の方が難しい。なぜなら，X は，Y があとから利己的に最適配置を行うことを考えに入れた上で，自身の最適配置を決めなければならないからである。

なお，この Stackelberg 解 X^* は，あとから Y がどんな位置に配置した場合でも X に最低限 $G_X(X^*, Y^*)$ だけの利得を保証する，というものではない。なぜならば，これは Y が最適反応戦略 $R_Y(X^*)$ を採ることを前提にして成り立つ解であり，もし Y がそうした合理的な戦略を採らず Y 自身にとって不利な判断基準を採用したり，ランダムに配置したりする場合には，X は $G_X(X^*, Y^*)$ よりも少ない利得しか得られない場合があるからである。そのような状況は，本論文とは異なるモデルで扱う必要がある。

3　Medianoid 問題

施設を配置するのは X, Y の順であるが，まず，X が施設を配置した状況での Y の最適配置を求める。すなわち，本節では，$X = (x_1, x_2)$ を定数，$Y = (y_1, y_2)$ を変数とみなしたときの $G_Y(X, Y)$ を最大にする Y を求めることを考える。

3.1　$G_Y(X, Y)$ の性質

ある P_k について

$$G_Y(X, Y) = \sum_{A_i \in V(P_k)} g_{iY}(X, Y) + \sum_{A_i \notin V(P_k)} g_{iY}(X, Y)$$

と分解し，まず前半の項

$$G_Y^k(X, Y) = \sum_{A_i \in V(P_k)} g_{iY}(X, Y)$$

の最大化について考える。

$A_i \in V(P_k)$ となるすべての A_i について，つねに $std(A_i, P_k) = 0$ が成り立つから，$g_{iY}(X, Y)$ は X によらず $Y = P_k$ で最大値をとる。よって明らかに $G_Y^k(X, Y)$ は $Y = P_k$ において最大値をとる。

次に，Y が P_k から離れる場合の G_Y^k の変化について考察する。$P_k = (p_{k1}, p_{k2})$ を通って y 軸に垂直な平面で G_Y^k を切ったときの断面，すなわち $y_2 = p_{k2}$ として y_1 を変化させたときの G_Y^k の変化を考える。ここで，P_k はすべての D_{i1},D_{i2} に含まれるから，P_k を通る y 軸に垂直な平面は，すべての D_{i1}, D_{i2} と交わる。

一般性を失わず $p_{k1} \le y_1$ の範囲についてのみ考察する。X の位置によって場合分けすると，g_{iY} について次のことがいえる。

1. $X \notin \bigcup_{A_i \in V(P_k)} D_{i2}$ のとき

(a) $a_{i1} \leq p_{k1}$ なる A_i それぞれに関して，g_{iY} は次のように変化する。

i. $p_{k1} \leq y_1 \leq p_{k1} + d_{i1}$ のとき，すなわち $Y \in D_{i1}$ のとき
$\frac{1}{2}std(A_i, Y) = y_1 - p_{k1}$ で，$g_{iY} = W_i$

ii. $p_{k1} + d_{i1} < y_1 < p_{k1} + d_{i2}$ のとき，すなわち $Y \in M_i$ のとき
g_{iY} は y_1 の増加に対して傾き $-\frac{W_i}{2(d_{i2}-d_{i1})}$ で減少

iii. $p_{k1} + d_{i2} \leq y_1$ のとき，すなわち $Y \notin D_{i2}$ のとき
$\frac{1}{2}std(A_i, Y) = y_1 - p_{k1}$ で，$g_{iY} = 0$

(b) $p_{k1} < a_{i1}$ なる A_i それぞれに関して，g_{iY} は次のように変化する。

i. $p_{k1} \leq y_1 \leq a_{i1}$ のとき，すなわち $Y \in D_{i1}$ のとき
$\frac{1}{2}std(A_i, Y) = 0$ で，$g_{iY} = W_i$

ii. $a_{i1} < y_1 \leq a_{i1} + d_{i1}$ のとき，すなわち $Y \in D_{i1}$ のとき
$\frac{1}{2}std(A_i, Y) = y_1 - a_{i1}$ で，$g_{iY} = W_i$

iii. $a_{i1} + d_{i1} < y_1 < a_{i1} + d_{i2}$ のとき，すなわち $Y \in M_i$ のとき
g_{iY} は y_1 の増加に対して傾き $-\frac{W_i}{2(d_{i2}-d_{i1})}$ で減少

iv. $a_{i1} + d_{i2} \leq y_1$ のとき，すなわち $Y \notin D_{i2}$ のとき
$\frac{1}{2}std(A_i, Y) = y_1 - a_{i1}$ で，$g_{iY} = 0$

2. $X \in \bigcup_{A_i \in V(P_k)} D_{i2}$ のとき

(a) $a_{i1} \leq p_{k1}$ なる A_i それぞれに関して，g_{iY} は次のように変化する。

i. $p_{k1} \leq y_1 \leq p_{k1} + d_{i1}$ のとき，すなわち $Y \in D_{i1}$ のとき
$\frac{1}{2}std(A_i, Y) = y_1 - p_{k1}$ で
$X \in D_{i1}$ である A_i については $g_{iY} = \frac{1}{2}W_i$
$X \notin D_{i1}$ である A_i については $g_{iY} = W_i$

ii. $p_{k1} + d_{i1} < y_1 < p_{k1} + d_{i2}$ のとき，すなわち $Y \in M_i$ のとき
$X \in D_{i1}$ である A_i については $g_{iY} = 0$
$X \notin D_{i1}$ である A_i については
$\mu_{\tilde{N}_i}(X) < \mu_{\tilde{N}_i}(Y)$ ならば g_{iY} は y_1 の増加に対して傾き $-\frac{W_i}{2(d_{i2}-d_{i1})}$ で減少
$\mu_{\tilde{N}_i}(X) = \mu_{\tilde{N}_i}(Y)$ ならば $g_{iY} = \frac{1}{2}\mu_{\tilde{N}_i}(Y)W_i$
$\mu_{\tilde{N}_i}(X) > \mu_{\tilde{N}_i}(Y)$ ならば $g_{iY} = 0$

iii. $p_{k1} + d_{i2} \leq y_1$ のとき，すなわち $Y \notin D_{i2}$ のとき
$\frac{1}{2}std(A_i, Y) = y_1 - p_{k1}$ で $g_{iY} = 0$

(b) $p_{k1} < a_{i1}$ なる A_i それぞれに関して，g_{iY} は次のように変化する。

i. $p_{k1} \leq y_1 \leq a_{i1}$ のとき，すなわち $Y \in D_{i1}$ のとき
$\frac{1}{2}std(A_i, Y) = 0$ で

$X \in D_{i1}$ である A_i については $g_{iY} = \frac{1}{2}W_i$

$X \notin D_{i1}$ である A_i については $g_{iY} = W_i$

ii. $a_{i1} < y_1 \leq a_{i1} + d_{i1}$ のとき，すなわち $Y \in D_{i1}$ のとき

$\frac{1}{2}std(A_i, Y) = y_1 - a_{i1}$ で

$X \in D_{i1}$ である A_i については $g_{iY} = \frac{1}{2}W_i$

$X \notin D_{i1}$ である A_i については $g_{iY} = W_i$

iii. $a_{i1} + d_{i1} < y_1 < a_{i1} + d_{i2}$ のとき，すなわち $Y \in M_i$ のとき

$X \in D_{i1}$ である A_i については $g_{iY} = 0$

$X \notin D_{i1}$ である A_i については

$\mu_{\tilde{N}_i}(X) < \mu_{\tilde{N}_i}(Y)$ ならば g_{iY} は y_1 の増加に対して傾き $-\frac{W_i}{2(d_{i2}-d_{i1})}$ で減少

$\mu_{\tilde{N}_i}(X) = \mu_{\tilde{N}_i}(Y)$ ならば $g_{iY} = \frac{1}{2}\mu_{\tilde{N}_i}(Y)W_i$

$\mu_{\tilde{N}_i}(X) > \mu_{\tilde{N}_i}(Y)$ ならば $g_{iY} = 0$

iv. $a_{i1} + d_{i2} \leq y_1$ のとき，すなわち $Y \notin D_{i2}$ のとき

$\frac{1}{2}std(A_i, Y) = y_1 - a_{i1}$ で，$g_{iY} = 0$

G_Y^k の断面は，以上の場合分けで明らかなように，区分的に線形で広義単調減少する連続関数 g_{iY} の和である。従って，G_Y^k の断面は y_1 に関して区分的に線形で広義単調減少し，$y_1 \leq \min\{p_{k1} + \min_{i:a_{i1} \leq p_{k1}}\{d_{i1}\}, a_{i1} + \min_{i:p_{k1} < a_{i1}}\{d_{i1}\}\}$ の範囲，すなわち P_k の直近の B_{i1} までの範囲で最大値をとる。$y_1 \leq p_{k1}$ の範囲および y 軸方向についても同様のことがいえるので，いずれの方向についても，P_k から最も近い境界 B_{i1} までの範囲内であれば，すなわち $Y \in \bigcap D_{i1}$ であれば $G_Y^k(X, Y)$ は最大値をとる。

また，y_1 が増加するとき，D_{i1} と M_i の境界である B_{i1} において g_{iY} は一定値から減少し，B_{i1} 近傍で凹である。また，M_i と D_{i2} の境界 B_{i2} において減少から 0 に変化し，g_{iY} は B_{i2} 近傍で凸である。X の位置により不連続点を含むが，凹凸性に影響はない。また，この凹凸は，g_{iY} の和をとった G_Y^k にも引き継がれる。

以上の G_Y^k の性質をまとめると，次のようになる。

1. x, y 方向について区分的に線形である
2. $d(P_k, Y)$ の増加に対して広義単調減少する
3. $\bigcap_{i:A_i \in V(P_k)} D_{i1}$ の領域で最大値をとり，周回点はつねにその領域に含まれる
4. B_{i1} の近傍で凹，B_{i2} の近傍で凸である

周回点が 1 点(もしくはすべての需要点が共通の周回点を利用する)の場合，$G_Y(X, Y) = G_Y^k(X, Y)$ であるから，周回点 P_k と，$\bigcap_{i:A_i \in V(P_k)} D_{i1}$ すなわち P_k を含み B_{i1} で区切ら

れた領域が Medianoid 問題の解である。

上記のような性質を持つ G_Y^k が複数重なる G_Y では，ある周回点から離れると別の周回点に近づく場合があるため，G_Y^k の性質 2，周回点からの距離による単調性が成り立たなくなることが明らかである。

また，G_Y では，必ずしも周回点において最大値をとるとは限らなくなる。例えば，需要点が 2 点しかない場合で考えると，$A_1 \in V(P_k)$ と $A_2 \in V(P_\ell)$ $(k \neq \ell)$ について，$D_{11} \cap D_{21} \neq \phi$ ならば X の位置によらず明らかに $Y \in D_{11} \cap D_{21}$ で最大値をとるが，自分が利用する以外の周回点を「十分近い」と感じることはないのだから，$D_{11} \cap D_{21}$ には P_k も P_ℓ も含まれない。従って，G_Y については，G_Y^k の性質 3 も成り立たない。残りの性質については和をとっても成り立つので，G_Y について成り立つのは，以下の性質である。

1. x, y 方向について区分的に線形である
2. B_{i1} の近傍で凹，B_{i2} の近傍で凸である

3.2　解候補の絞り込み

G_Y が最大値をとる点を 1 点でも見つければ Medianoid 問題の解として十分であるとして，解の候補を絞り込んでいくことを考える。

いま，いくつかの B_{i1},B_{i2} を境界にもつ領域で，B_{i1},B_{i2} によってそれ以上分割されない小領域のひとつひとつを S_j とラベル付けする。B_{i1},B_{i2} の辺の向きは 4 方向に限定されているので，S_j も 4 方向の辺のみで構成される多角形 (凸多角形とは限らない) である。

S_j のうちで，いずれの M_i とも交わらないものを S_j^0 と表すと，$Y \in S_j^0$ ならば G_Y が一定の値をとる。S_j^0 内では G_Y は一定であるから，近傍で凸である B_{i2} を境界に持つような S_j^0 内では，G_Y が極大となることはない。従って，境界が B_{i1} だけで構成される S_j^0 の境界 B_{i1} が解の候補となる。さらに，S_j^0 内で G_Y が一定であるから，そのような S_j^0 の頂点のみを解の候補とすれば十分である。

S_j^0 以外のすべての S_j を S_j^M と表すと，$Y \in S_j^M$ ならば G_Y がいずれかの方向に線形の傾きをもっていることになる。従って，G_Y は S_j^M の境界で極大となるが，直角距離を用いていることにより，M_i の等高線も G_Y の等高線も S_j^M のいずれかの辺に平行であり，極大となる境界は明らかに G_Y の等高線と平行な B_{i1} のうち S_j^M の辺となっている部分である。この部分では G_Y が一定であるから，この辺の端点すなわち B_{i1} を辺の

一部とする S_j^M の頂点を解の候補とする。

以上をまとめると，Medianoid 問題の解の候補として，B_{i1} によって構成される多角形の頂点のみを列挙すればよいことになる。そのような頂点となり得るのは，以下の点である。

1. 八角形 B_{i1} の頂点
2. 2 つの八角形 B_{i1}, B_{j1} の垂直辺と水平辺の交点
3. 2 つの八角形 B_{i1}, B_{j1} の斜辺と垂直辺または水平辺の交点

従って，まず，これらの点を列挙し，その中から G_Y を最大にする点を探索すれば良いことになる。

3.3　Medianoid 問題の解法

解候補として列挙すべき点を以下に明示的に示す。

八角形 B_{i1} の頂点

八角形 B_{i1} の頂点に，右下を起点として反時計回りに $Q_i^1, \cdots Q_i^8$ のように名前を付けると，各頂点の座標は次のようになる。

$Q_i^1 = (\max\{a_{i1}, p_{k1}\} + d_{i1}, \min\{a_{i2}, p_{k2}\})$, $Q_i^2 = (\max\{a_{i1}, p_{k1}\} + d_{i1}, \max\{a_{i2}, p_{k2}\})$
$Q_i^3 = (\max\{a_{i1}, p_{k1}\}, \max\{a_{i2}, p_{k2}\} + d_{i1})$, $Q_i^4 = (\min\{a_{i1}, p_{k1}\}, \max\{a_{i2}, p_{k2}\} + d_{i1})$
$Q_i^5 = (\min\{a_{i1}, p_{k1}\} - d_{i1}, \max\{a_{i2}, p_{k2}\})$, $Q_i^6 = (\min\{a_{i1}, p_{k1}\} - d_{i1}, \min\{a_{i2}, p_{k2}\})$
$Q_i^7 = (\min\{a_{i1}, p_{k1}\}, \min\{a_{i2}, p_{k2}\} - d_{i1})$, $Q_i^8 = (\max\{a_{i1}, p_{k1}\}, \min\{a_{i2}, p_{k2}\} - d_{i1})$

八角形 B_{i1},B_{j1} の垂直辺と水平辺の交点

八角形 B_{i1} の辺に，右側の辺を起点として反時計回りに $B_i^1, \cdots, B_i^8$ のように名前を付ける。すなわち，$B_i^1 = \overline{Q_i^1 Q_i^2}$, $B_i^2 = \overline{Q_i^2 Q_i^3}$, $\cdots$, $B_i^7 = \overline{Q_i^7 Q_i^8}$, $B_i^8 = \overline{Q_i^8 Q_i^1}$ とする。

垂直辺と水平線との交点については，2 つの八角形 B_{i1} と B_{j1} において $P(A_i) = P_k$, $P(A_j) = P_\ell$ とすると，交点の座標は以下のようになる。なお，添え字の入れ替えにより，以下の 4 通りですべての場合を尽くせる。

1. $\min\{a_{j1}, p_{\ell j}\} < \max\{a_{i1}, p_{k1}\} + d_{i1} < \max\{a_{j1}, p_{\ell 1}\}$ かつ
   $\min\{a_{i2}, p_{k2}\} < \max\{a_{j2}, p_{\ell 2}\} + d_{j1} < \max\{a_{i2}, p_{k2}\}$ ならば
   B_i^1 と B_j^3 が交わり，交点は $(\max\{a_{i1}, p_{k1}\} + d_{i1}\,, \max\{a_{j2}, p_{\ell 2}\} + d_{j1})$

2. $\min\{a_{j1}, p_{\ell 1}\} < \max\{a_{i1}, p_{k1}\} + d_{i1} < \max\{a_{j1}, p_{\ell 1}\}$ かつ
$\min\{a_{i2}, p_{k2}\} < \min\{a_{j2}, p_{\ell 2}\} - d_{j1}) < \max\{a_{i2}, p_{k2}\}$ ならば
B_i^1 と B_j^7 が交わり，交点は $(\max\{a_{i1}, p_{k1}\} + d_{i1}\ ,\ \max\{a_{j2}, p_{\ell 2}\} - d_{j1})$
3. $\min\{a_{j1}, p_{\ell 1}\} < \min\{a_{i1}, p_{k1}\} - d_{i1} < \max\{a_{j1}, p_{\ell 1}\}$ かつ
$\min\{a_{i2}, p_{k2}\} < \max\{a_{j2}, p_{\ell 2}\} + d_{j1} < \max\{a_{i2}, p_{k2}\}$ ならば
B_i^5 と B_j^3 が交わり，交点は $(\max\{a_{i1}, p_{k1}\} - d_{i1}\ ,\ \max\{a_{j2}, p_{\ell 2}\} + d_{j1})$
4. $\min\{a_{j1}, p_{\ell 1}\} < \min\{a_{i1}, p_{k1}\} - d_{i1} < \max\{a_{j1}, p_{\ell 1}\}$ かつ
$\min\{a_{i2}, p_{k2}\} < \min\{a_{j2}, p_{\ell 2}\} - d_{i1} < \max\{a_{i2}, p_{k2}\}$ ならば
B_i^5 と B_j^7 が交わり，交点は $(\max\{a_{i1}, p_{k1}\} - d_{i1}\ ,\ \max\{a_{j2}, p_{\ell 2}\} - d_{j1})$

なお，これらのパターンは $P_k = P_\ell$ の場合を含んでいる。$P_k = P_\ell$ のとき，B_i^1,B_i^3,B_i^5,B_i^7 はそれぞれ B_j^1,B_j^3,B_j^5,B_j^7 のいずれかと高々1回交わるだけであるが，$P_k \neq P_\ell$ のときには，B_i^1,B_i^3,B_i^5,B_i^7 はそれぞれ B_j^1,B_j^3,B_j^5,B_j^7 のうちの互いに平行な2辺と交わることがある。

八角形 B_{i1},B_{j1} の斜辺と垂直辺または水平辺の交点

斜辺と垂直辺または水平線との交点については，$\{B_i^2, B_i^4, B_i^6, B_i^8\} \times \{B_j^1, B_j^3, B_j^5, B_j^7\}$ で16通りの場合があるが，$B_i^2 \times \{B_j^1, B_j^3, B_j^5, B_j^7\}$ の4通りの場合のみを示し，それ以外は省略する。

1. $\max\{a_{i1}, p_{k1}\} < \max\{a_{j1}, p_{\ell 1}\} + d_{j1} < \max\{a_{i1}, p_{k1}\} + d_{i1}$ かつ
$\min\{a_{j2}, p_{\ell 2}\} < \max\{a_{i2}, p_{k2}\} + d_{i1} - (\max\{a_{j1}, p_{\ell 1}\} + d_{j1} - \max\{a_{i1}, p_{k1}\}) < \max\{a_{j2}, p_{\ell 2}\}$ ならば，B_i^2 と B_j^1 が交わり，交点は
$(\max\{a_{j1}, p_{\ell 1}\} + d_{j1}\ ,\ \max\{a_{i2}, p_{k2}\} + d_{i1} - (\max\{a_{j1}, p_{\ell 1}\} + d_{j1} - \max\{a_{i1}, p_{k1}\}))$
2. $\max\{a_{i2}, p_{k2}\} < \max\{a_{j2}, p_{\ell 2}\} + d_{j1} < \max\{a_{i2}, p_{k2}\} + d_{i1}$ かつ
$\min\{a_{j1}, p_{\ell 1}\} < \max\{a_{i1}, p_{k1}\} + (\max\{a_{i2}, p_{k2}\} + d_{i1} - \max\{a_{j2}, p_{\ell 2}\}) + d_{j1}) < \max\{a_{j1}, p_{\ell 1}\}$ ならば，B_i^2 と B_j^3 が交わり，交点は
$(\max\{a_{i1}, p_{k1}\} + (\max\{a_{i2}, p_{k2}\} + d_{i1} - \max\{a_{j2}, p_{\ell 2}\}) + d_{j1})\ ,\ \max\{a_{j2}, p_{\ell 2}\} + d_{j1})$
3. $\max\{a_{i1}, p_{k1}\} < \min\{a_{j1}, p_{\ell 1}\} - d_{j1} < \max\{a_{i1}, p_{k1}\} + d_{i1}$ かつ
$\min\{a_{j2}, p_{\ell 2}\} < \max\{a_{i2}, p_{k2}\} + d_{i1} - (\min\{a_{j1}, p_{\ell 1}\} - d_{j1} - \max\{a_{i1}, p_{k1}\}) < \max\{a_{j2}, p_{\ell 2}\}$ ならば，B_i^2 と B_j^5 が交わり，交点は
$(\min\{a_{j1}, p_{\ell 1}\} - d_{j1}\ ,\ \max\{a_{i2}, p_{k2}\} + d_{i1} - (\min\{a_{j1}, p_{\ell 1}\} - d_{j1} - \max\{a_{i1}, p_{k1}\}))$
4. $\max\{a_{i2}, p_{k2}\} < \min\{a_{j2}, p_{\ell 2}\} - d_{j1} < \max\{a_{i2}, p_{k2}\} + d_{i1}$ かつ
$\min\{a_{j1}, p_{\ell 1}\} < \max\{a_{i1}, p_{k1}\} + (\max\{a_{i2}, p_{k2}\} + d_{i1} - (\min\{a_{j2}, p_{\ell 2}\}) - d_{j1}) <$

$\max\{a_{j1}, p_{\ell 1}\}$ ならば，B_i^2 と B_j^7 が交わり，交点は
$(\min\{a_{j2}, p_{\ell 2}\} - d_{j1}\,,\, \max\{a_{i1}, p_{k1}\} + (\max\{a_{i2}, p_{k2}\} + d_{i1} - (\min\{a_{j2}, p_{\ell 2}\}) - d_{j1}))$

これらは排他的ではなく，B_i^2 と B_j^1 および B_i^2 と B_j^3 が同時に交わることもある。

最後に，以上の結果を使い，Medianoid 問題を解く手続きをまとめる。

Medianoid 問題を解く手続き

Step 1. 前処理として，$P_1, \cdots, P_m$ に対する Voronoi 図を構成する

Step 2. $L \leftarrow \phi$

Step 3. すべての A_i について 4-5 を行う

Step 4. Voronoi 図を使い $P(A_i)$ を求める

Step 5. 頂点 $Q_i^1, \cdots, Q_i^8$ および B_i と B_j $(i \neq j)$ の交点を L に追加

Step 6. $k \leftarrow 1\,,\, N \leftarrow |L|\,,\, T \leftarrow 0$

Step 7. $Y \leftarrow L_k$

Step 8. $G_Y(X,Y) > T$ ならば $T = G_Y(X,Y)\,,\, Y^* = Y$

Step 9. $k < N$ ならば $k \leftarrow k+1$ として Step 7 へ

Step 10. Y^* を Medianoid 問題の解として終了

計算量については，Voronoi 図を構成するために $O(m \log m)$ が必要である [5]。また八角形を構成するために $O(n)$，八角形の辺 B_i の交点を列挙するために $O(n^2)$ が必要である。Step 6-9 は線形探索であるから $O(N)$ であるが，N は最悪の場合 n^2 に比例する。従って，合計では $O(m \log m + n^2)$ となる。周回点の数 m は需要点の数 n には依存せず，また n よりもかなり小さいことが想定されるので，現実には $O(n^2)$ のオーダーとなる。

4 Centroid 問題

前節において，先手 X の位置にかかわらず，Y の最適配置は B_{i1} 上にあることが示された。先手 X は，後手 Y が Medianoid 問題の解である点 Y^* に配置してくることを考慮して自己の配置を決めねばならない。

4.1　問題の特徴

問題の特徴を簡単な例で述べておく。4つの需要点と2つの周回点が，$A_1, P_1, A_2, A_3, P_2, A_4$ の順に一直線上に並んでおり，これらの点が $P(A_1) = P(A_2) = P_1$, $P(A_3) = P(A_4) = P_1$ という関係を満たしているものとする。需要点の重み $W_1, \cdots, W_4$ は順に3,4,4,3とし，すべての d_{i1} は等しく $D_{11} \cap D_{31} = \phi$, $D_{21} \cap D_{31} \neq \phi$, $D_{21} \cap D_{41} = \phi$ を満たしているものとする。このとき，4つの境界 $B_{11}, \cdots, B_{41}$ で区切られた7つの有界領域を $R_1, \cdots, R_7$ と名付ける。すなわち，$R_1 = D_{11} \setminus D_{21}$, $R_2 = D_{11} \cap D_{21}$, $R_3 = D_{21} \setminus (D_{11} \cup D_{31}), \cdots$ である。このとき，もし競合他者が存在しなければ，$R_1, \cdots, R_7$ それぞれの領域において，得られる利得は3,7,4,8,4,7,3である。

いま X が，Y の参入を考慮せず近視眼的に，最大の利得を得ようと R_4 の領域に施設を配置するとする。このとき，各領域 R_i で Y が獲得可能な利得は，最善を尽くしても W_2 と W_3 については半分ずつしか獲得できないから，それぞれの領域で3,5,2,4,2,5,3となる。従って，Y にとっては，R_2 または R_6 に置いて5を獲得することが最適反応戦略となる。そして，Y がこの最適反応戦略を採ったとき，W_2 または W_3 は X,Y で等しく分け合うことになるため，最終的に X が R_4 で獲得できる利得は8ではなく6になる。

一方，もし最初に X が R_2 に置いたとき，Y にとっては各領域で1.5, 3.5, 2, 6, 4, 7, 3の利得が残されることになる。よって，Y は R_6 に置いて利得7を獲得する。すると最終的に X と Y は，R_2 と R_6 において両者とも7の利得を獲得することになる。これは明らかに近視眼的な方法での利得6と5よりも両者にとって良い解である。

このように，先手 X は，後手 Y に意図的に購買力を残しておく場所を作ることで，相手を自分から遠ざけ，それによってお互いに利得を上げることができる場合がある。

4.2　Centroid問題の解法

いま，$X \in S_j^0$ である X で $G_X(X, Y^*)$ が最大になっていると仮定する。このとき，S_j^0 内であれば，X がどこに配置しても Y の最適反応戦略は変化しないから，S_j の境界すなわち B_{i1} はCentroid問題の解を含んでいる。

また，$X \in S_j^M$ である X で $G_X(X, Y^*)$ が最大になっていると仮定すると，Y^* はすべての需要点について $\mu_{\tilde{N}_j}(Y^*) = 1$ または $\mu_{\tilde{N}_j}(Y^*) = 0$ のいずれかになっているから，X は $S_j^M \cap M_i \neq \phi$ である A_i に関して，$\mu_{\tilde{N}_i}(Y^*) = 1$ ならば0を，$\mu_{\tilde{N}_i}(Y^*) = 0$ ならば $\mu_{\tilde{N}_i}(X) W_i$ を得ている。X の利得が0の A_i に関しては，X が S_j^M 内のどこに置いても

Y の最適反応戦略は変化せず，X の利得が $\mu_{\tilde{N}_i}(X)W_i$ の A_i に関しても，Y は A_i については利得 0 で最適反応戦略になっているので，これもあえて A_i からの利得を多くするように Y が戦略を変えることはありえない。従って，領域 S_j^M 内であれば，X がどこに配置しても Y の最適反応戦略は変化しない。かつ，X は S_j^M 内で $\mu_{\tilde{N}_i}(X)$ を最大にするような点に配置した方が有利で，S_j^M は 1 方向に傾きをもっているから，その増大方向にある境界 B_{i1} 上に配置するのが有利である。

従って，Centroid 問題の解も B_{i1} 上にあり，Medianoid 問題の解の候補と同じく B_{i1} によって構成される多角形 S_j の頂点を解の候補とすればよい。

次に Centroid 問題を解く手続きを示す。基本方針は，近視眼的な最大利得が見込める位置 L_1 から順に X を置いたと仮定して，X がその位置の場合の Medianoid 問題を解いて G_X を求めることを繰り返し，G_X の最大値を与える X を探索する。ここで，先手後手とも，最悪の場合でも L_1 で獲得できる利得 M を半分ずつ分け合うだけで済むので，$\frac{1}{2}M$ を下界として探索を打ち切ることができる。

Centroid 問題を解く手続き

Step 1. $X \leftarrow (\infty, \infty)$

Step 2. Medianoid 問題の解探索手続きの Step 1-5 を用いて L を構成する

Step 3. すべての $Y \in L$ について $G_Y(X,Y)$ を計算し，その値の降順に L を整列する

Step 4. $k \leftarrow 1$, $M \leftarrow G_Y(X, L_1)$, $T \leftarrow 0$

Step 5. $X \leftarrow L_k$

Step 6. Medianoid 問題の解探索手続きの Step 6-10 を用いて Y^* を求める

Step 7. $G_X(X, Y^*) > T$ ならば $T \leftarrow G_X(X, Y^*)$, $X^* \leftarrow X$

Step 8. $G_X(X, Y^*) \geq \frac{1}{2}M$ ならば $k \leftarrow k+1$ として Step 5 へ

Step 9. X^* を Centroid 問題の解として終了

計算量については，L の要素数が最悪の場合 n^2 に比例するので，L の整列に $O(n^2 \log n^2)$ が必要である。また，Medianoid 問題を解くのに $O(n^2)$ が必要である。Step 5-8 は線形探索であるから L の要素数に比例する。従って，最悪の場合は合計では $O(n^4)$ となる。

5　おわりに

本論文では，平面上での先手後手の区別のある競合配置問題について考察した。都市部のモデルとして，需要点から施設までの距離を近似するため直角距離を採用し，それに基づき寄り道距離という距離の概念を導入した。また、近さを表すメンバシップ関数を導入して近いと感じる場合だけ施設を利用するという選好をモデル化した。最適配置問題をMedianoid問題とCentroid問題として定式化し，解候補を絞り込むとともに解を得る方法を示した。Centroid問題において，近視眼的な利得を追わずに競合者のためにいくらか「残して」おくことで最終的な自己の利得を増やせる場合があることを示した。

周回点が1点ならば周回点近くが解となるが，周回点が複数になると必ずしもそうとは限らないことを示した。一般に，顧客が「十分近い」と感じる距離が短いほど，周回点間で購買力が重なる領域が減るので，解が周回点の近くに現れやすくなる。逆に，多くの人が時間的にも体力的にも余裕を持っていたり，簡便な移動手段を持っていたりすると，周回点から離れた場所に解が現れる場合が出てくる。

ここで示した解の探索方法は，解の候補を列挙してその中から最適解を選ぶという手法で，必ずしも効率は良くないものの，厳密解を求めることができる。周回点や需要点の分布に仮定を設けない限り，今のところ探索効率の向上に関しては見通しが良くないが，厳密解ではなく近似解を求めるなどの方法で効率を追求することも検討している。

さらなる研究課題としては，施設の設置コスト等を考慮することが考えられる。例えば周回点に近い方が地代等が高いという仮定を設けると，周回点から離れた場所に設置する方が有利になり，別の解が現れよう。また，ここでは周回点を利用する顧客を周回点のVoronoi領域を使って表したが，複数の路線が入り組んだ都会では，最も近い駅ではなく，路線を基準に駅を選択することになろう。したがって，Voronoi領域とは必ずしも一致しない周回関係を仮定したモデルも考えられる。

参考文献

[1] H.Hotelling, 1929, “Stability in Competition”, The Economic Journal, Vol.30 , pp. 41-57.

[2] S.L.Hakimi, 1983, “On Locating New Facilities in a Competitive Environment”,

European Journal of Operational Research, Vol.12, pp. 29-35.

[3] Z.Drezner, 1982, “Competitive Location Strategies for Two Facilities”, Regional Science and Urban Economics, Vol.12, pp. 485-493.

[4] H.A.Eiselt, 1992, “Hotelling's Duopoly on a Tree”, Annals of Operations Research, Vol.40, pp.195-207.

[5] 伊理正夫, 腰塚武志, 1993, 「計算機科学と地理情報処理」, 共立出版

[6] Z.Drezner (ed.), 1995, “Facility Location, A Survay of Applications and Methods”, Springer.

[7] Z.Drezner, H.W.Hamacher, 2001, “Facility Location: Applications and Theory”, Springer Verlag.

[8] 神頭広好, 2001, 「都市と地域の立地論」, 古今書院

[9] S.Osumi, S.Shiode, 2007, “Location Game with Facility Dependent Fuzzy Demand”, Asia Pacific Management Review, Vol.12, Num. 5, pp.283-289.